DM SCIENCES PHYSIQUES N°6

Pour répondre à la raréfaction des énergies fossiles, il est nécessaire de trouver de nouvelles sources d'énergie décarbonées . Parmi celles-ci, la fusion thermonucléaire est une des pistes à long terme qui donne lieu à une coopération internationale sans précédent avec le projet de recherche ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), dont les installations sont implantées à Cadarache, dans les Bouches-du-Rhône.
La fusion thermonucléaire consiste à faire entrer en collision deux noyaux légers pour obtenir un noyau plus lourd. Cette réaction nucléaire libère de grandes quantités d'énergie du fait qu'une partie de la masse des noyaux est convertie en énergie. Les efforts de recherche portent actuellement sur une réaction nucléaire impliquant deux isotopes de l'hydrogène : le deutérium ^2_1D et le tritium ^3_1T . La réaction nucléaire produit un noyau d'hélium ^4_2He et un neutron selon l'équation de réaction :

$$^2_1D + ^3_1T \rightarrow ^4_2He + ^1_0n$$

Dans un réacteur de fusion, la matière est à l'état de plasma. On appelle plasma un état de la matière constitué d'ions, d'électrons libres et d'espèces neutres. Cet état résulte des très hautes températures atteintes dans le réacteur qui permettent l'ionisation des atomes.

Données numériques

Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ F·m^{-1}
Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1{,}26\cdot10^{-6}$ H·m^{-1}
Charge élémentaire : $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C
Masse de l'électron : $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg
Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}4\cdot10^{-23}$ J·K^{-1}

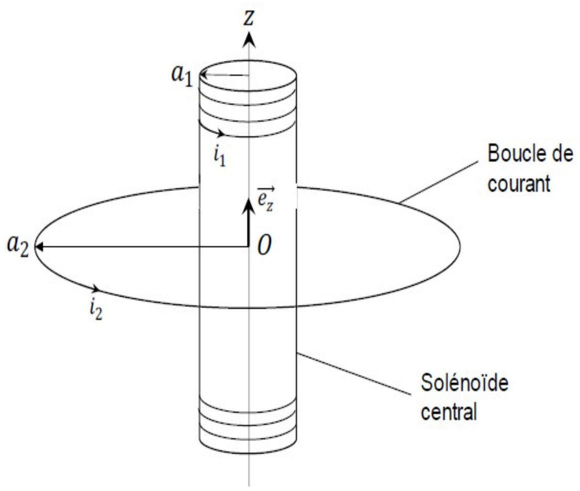
Formulaire

Formule du double rotationnel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Pour rendre possible la fusion, il faut vaincre la barrière coulombienne qui s'oppose au rapprochement des deux noyaux d'hydrogène. C'est la raison pour laquelle il est préalablement nécessaire d'échauffer le plasma jusqu'à ce que les réactions de fusion s'initient. L'objectif est ensuite d'atteindre le seuil d'ignition, c'est-à-dire le moment où l'énergie libérée par les réactions de fusion suffit à maintenir la température nécessaire à la fusion.

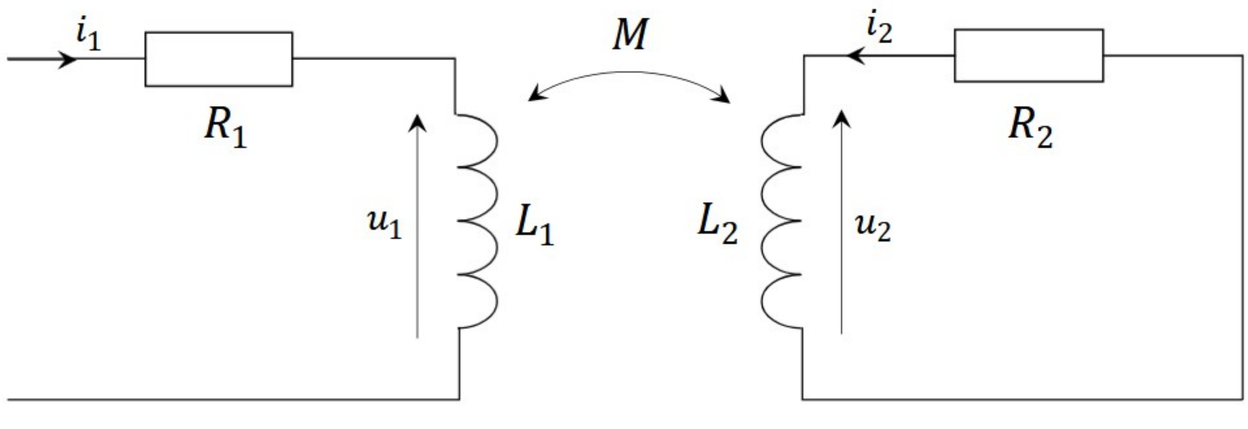
A - Chauffage ohmique par induction

Dans les tokamaks , une partie de l'échauffement est réalisé par induction. Un solénoïde situé au centre du tokamak produit un champ magnétique $\vec{B}_1$ dépendant du temps. Le plasma, de géométrie torique, entoure ce solénoïde central : il est alors parcouru par un intense courant induit qui, par effet Joule, échauffe le plasma.
On se propose de modéliser sommairement cette situation.
On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) . Le solénoïde central d'axe (Oz), de rayon a_1 , est parcouru par un courant $i_1(t)$ qui génère un champ magnétique $\vec{B}_1(r, t)$, tel que $\vec{B}_1(r<a_1, t)=\beta i_1(t)\vec{u}_z$ (avec β constant) et $\vec{B}_1(r>a_1, t)=\vec{0}$. Le plasma est assimilé à une boucle de courant filiforme parcourue par $i_2(t)$ de même axe que le solénoïde central et de rayon $a_2 > a_1$ (figure ci-dessous).



1- Exprimer l'inductance mutuelle M entre le solénoïde central et la boucle de courant, en fonction de $i_2(t)$ et de a_1 . Calculer M pour le tokamak ITER, sachant que a_1 = 2 m et que le champ magnétique au centre du solénoïde est de 13 T pour un courant maximal de 46 kA.

On modélise l'interaction entre le solénoïde et le plasma par le circuit électrique représenté ci-dessous.
Le solénoïde central, d'inductance propre L_1 et de résistance $\frac{di_2}{dt}+\frac{i_2}{\tau_2}=\frac{I_0}{\tau_1}$, est parcouru entre t = 0 et t = t_1 par le courant $i_1(t)=I_0(1-\frac{t}{t_1})$ avec I_0 et t_1 des constantes. La boucle de courant représentant le plasma a pour résistance R_2 et pour inductance propre L_2 ; elle est parcourue par le courant $i_2(t)$.
À t < 0 , le courant i_2 est nul. M est l'inductance mutuelle entre les deux circuits.



2- Montrer que $i_2(t)$ vérifie l'équation différentielle : $\frac{d\,i_2}{dt}+\frac{i_2}{\tau_2}=\frac{I_0}{\tau_1}$ avec τ_1 et τ_2 qui seront exprimés en fonction de L_2, R_2, M et de t_1 .
3- En déduire $i_2(t)$. En supposant $t \ll \tau_2$, simplifier cette expression par un développement limité au premier ordre en $\frac{t}{\tau_2}$.
4- Exprimer l'énergie reçue par R_2 entre t = 0 et t = t_1 en fonction de $L_2, R_2, M\ , I_0 et t_1$, en supposant que $t_1 \ll \tau_2$. Quel est l'effet de cette énergie sur le plasma ?
5- Le physicien américain Lyman Spitzer a établi en 1950 que la résistivité ρ d'un plasma soumis à un champ magnétique dépendait de la température T du plasma proportionnellement à $T^{\frac{-3}{2}}$. À partir de cette information, quelle critique peut-on émettre sur la modélisation effectuée dans cette partie ?

B- Échauffement par ondes électromagnétiques
En complément du chauffage ohmique, l'utilisation d'ondes électromagnétiques est envisagée. On se place ici dans l'hypothèse d'un plasma dilué non relativiste. On munit l'espace d'une base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et on suppose qu'une onde électromagnétique plane transversale de champ électrique

$\vec{E}=E_x(z,t)\vec{u}_x+E_y(z,t)\vec{u}_y$ se propage selon $\vec{u}_z$. Du fait du confinement magnétique, on tient compte de la présence d'un champ magnétique stationnaire et uniforme qu'on suppose colinéaire à la direction de propagation : $\vec{B}_0=B_0\vec{u}_z$.

6- Écrire les équations de Maxwell. On notera $\vec{j}$ la densité volumique de courant et ρ la densité volumique de charge.
7- Montrer que le caractère transversal de l'onde implique $\rho=0$.
8- Établir l'équation d'onde sur le champ électrique: $\vec{\Delta}\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ où c sera exprimée en fonction de ω et de μ_0.

On souhaite maintenant déterminer $\vec{j}$ dans le plasma.

9- Pour quelle raison peut-on faire l'hypothèse que les ions du plasma ont une contribution négligeable devant celle des électrons dans l'expression de $\vec{j}$? Par la suite, on n'envisagera que la contribution des électrons dans l'expression de $\vec{j}$.

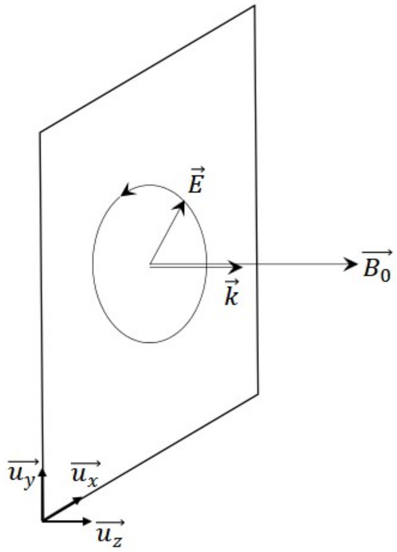
On suppose que le champ électrique est une pseudo-onde plane progressive sinusoïdale à laquelle on associe une polarisation circulaire gauche , qu'on écrit sous forme complexe :

$$\underline{\vec{E}}(z,t)=E_0\exp(i(\omega t-\underline{k}z))\vec{u}_x-iE_0\exp(i(\omega t-\underline{k}z))\vec{u}_y$$

avec ω la pulsation et $\underline{k}$ le module d'onde complexe.
On étudie le mouvement d'un électron dans le plan $z=0$ sous l'effet conjugué du champ électrique $\underline{\vec{E}}(z,t)$ et du champ magnétique $\vec{B}_0$. En régime permanent, sa vitesse a pour expression complexe :

$$\underline{\vec{v}}=\underline{v_x}\,esp(i\omega t)\vec{u}_x+\underline{v_y}\exp(i\omega t)\vec{u}_y \quad \text{avec} \quad \underline{v_x} \quad \text{et} \quad \underline{v_y} \quad \text{les amplitudes complexes .}$$

On considère que les seules forces s'exerçant sur l'électron sont la force électrique et la force magnétique liée au champ magnétique statique $\vec{B}_0$. On néglige le poids de l'électron et la force magnétique liée au passage de l'onde.



Onde de polarisation circulaire gauche se propageant parallèlement au champ magnétique $\vec{B_0}$

10- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'électron, montrer que $\underline{v_x}$ et $\underline{v_y}$ vérifient les équations couplées : $\underline{v_x}=\frac{i\alpha}{\omega}+\frac{i\omega_C}{\omega}\underline{v_y}$ et $\underline{v_y}=\frac{\alpha}{\omega}-\frac{i\omega_C}{\omega}\underline{v_x}$
avec $\omega_c=\frac{eB_0}{m_e}$ la pulsation cyclotron et α à exprimer en fonction de e, m_e et de E_0.

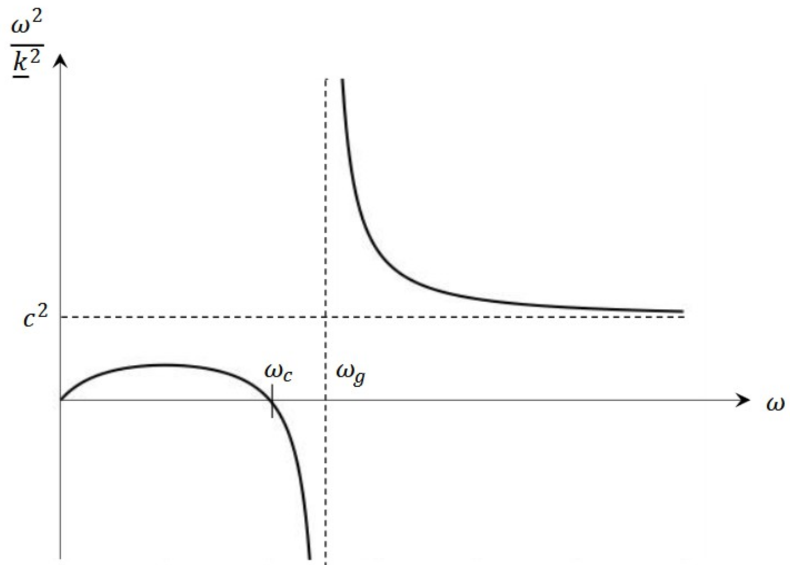
La résolution de ce système d'équations permet d'établir la relation, vraie pour tout z :

$$\underline{\vec{v}} = i\,\frac{e}{m_e(\omega-\omega_c)}\,\underline{\vec{E}}$$

11 - Lorsque $\omega=\omega_c$, l'onde électromagnétique échauffe le plasma : expliquer pourquoi. On parle alors de chauffage à résonance cyclotronique électronique. Justifier le terme de résonance employé dans cette situation.
12- On note n_0 la densité volumique d'électrons (en m^{-3}) dans le plasma. Établir l'expression de $\underline{\vec{j}}$, puis montrer que la relation de dispersion de cette onde s'écrit : $\underline{k}^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\omega_P{}^2}{\omega(\omega-\omega_c)}\right)$ avec $\omega_P=\sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$

la pulsation plasma.
13- Calculer la pulsation plasma ω_P au sein du tokamak ITER dans lequel $n_0=10^{20}\,m^{-3}$.

Sur la figure ci-dessous, on a tracé $\frac{\omega^2}{\underline{k}^2}$ en fonction de ω . On a introduit la pulsation $\omega_g=\frac{\omega_c+\sqrt{\omega_c{}^2+4\omega_p{}^2}}{2}$.



14- Déterminer, en justifiant votre réponse, pour quel(s) intervalle(s) de pulsations l'onde peut se propager dans le plasma.
15- Déterminer l'expression de la vitesse de phase de l'onde .
Que dire de celle-ci pour $\omega=\omega_c$ proposer une interprétation .
16- Déterminer l'expression de la vitesse de groupe .