Echauffement d'un plasma (extrait CCINP PC 2024) :

I Chauffage ohmique par induction :

1- Déterminons le flux de $\vec{B}_1$ à travers la boucle de courant.

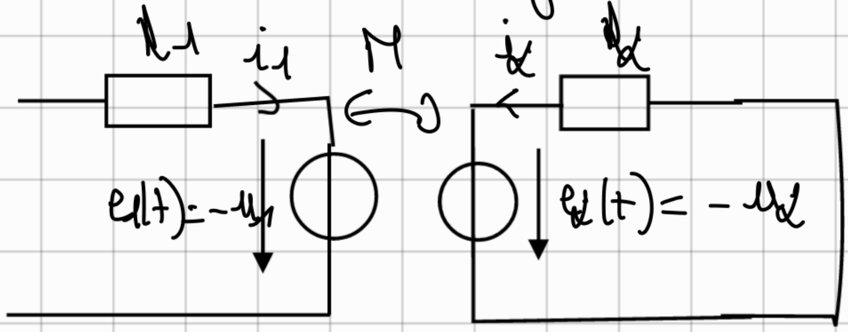
$$\Phi_{1\to 2} = \iint_{\substack{\text{disque} \\ \text{rayon } a_1}} \vec{B}_1 \cdot dS\,\vec{u}_z = \beta \pi a_1^2\, i_1(t) = M\, i_1(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M = \beta \pi a_1^2}$$

Pour le tokamak ITER : $\beta = \dfrac{13}{46\cdot 10^3}$ $H.m^{-2}$

$$M = \frac{13\times\pi\times 4}{46\cdot 10^3} = 3,6 \text{ mH}$$

2- Le schéma est également équivalent à



$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt} \quad \text{avec } \Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

$$e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} \quad \text{avec } \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

or $e_2 = R_2 i_2 = -L_2 \dfrac{di_2}{dt} - M \dfrac{di_1}{dt}$

or $\quad i_1(t) = I_0\left(1 - \dfrac{t}{t_1}\right) \Rightarrow \dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{I_0}{t_1}$

D'où $$\frac{di_\ell}{dt} + \frac{R_\ell}{L_\ell} i_\ell(t) = +\frac{M}{L_\ell}\frac{I_0}{t_1}$$

Soit $\boxed{\tau_\ell = \frac{L_\ell}{R_\ell}}$ $\boxed{\tau_1 = \frac{t_1 L_\ell}{M}}$

d'où $$\boxed{\frac{di_\ell}{dt} + \frac{i_\ell}{\tau_\ell} = \frac{I_0}{\tau_1}}$$

3 – $i_\ell(t) = \frac{\tau_\ell}{\tau_1} I_0 + A e^{-t/\tau_\ell}$

Par continuité de l'énergie $i_\ell(0^-) = i_\ell(0^+) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{i_\ell(t) = \frac{\tau_\ell}{\tau_1} I_0 \left(1 - e^{-t/\tau_\ell}\right)}$$

Pour $\frac{t}{\tau_\ell} \ll 1$ $\quad e^{-t/\tau_\ell} \simeq 1 - \frac{t}{\tau_\ell}$

$$\boxed{i_\ell(t) \simeq \frac{I_0}{\tau_1} t}$$

4 – La puissance reçue par R_ℓ vaut $R_\ell i_\ell^2$

D'où $E_\ell = \int_0^{t_1} R_\ell i_\ell^2 \, dt = \frac{R_\ell I_0^2}{\tau_1^2}\int_0^{t_1} t^2 dt$

$$E_\ell = \frac{R_\ell}{\tau_1^2} I_0^2 \times \frac{t_1^3}{3} = \frac{R_\ell t_1^3 M^2}{3 t_1^2 L_\ell^2} I_0^2$$

$$\boxed{E_\ell = \frac{R_\ell M^2 I_0^2}{3 L_\ell^2} t_1}$$

Cette énergie, reçue par le plasma, va augmenter sa température.

5 – Lorsque T augmente, la résistivité diminue

donc R_x diminue et donc l'énergie reçue diminue.
De plus R_x varie au cours du temps et T varie, ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle proposé.

II Echauffement par ondes électromagnétiques :

6 –

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left[\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$

7 – $\vec{E} = E_x(z,t)\vec{u}_x + E_y(z,t)\vec{u}_y$

$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ d'où $\rho = 0$

8 – $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E}$

$= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

D'où on obtient l'équation :

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}} \text{ avec } \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

9 – La masse des ions du plasma étant très grande devant celle des électrons, leur vitesse sera très inférieure à celle des électrons donc on pourra ne considérer que la contribution des électrons pour le calcul de $\vec{j}$.

10 – On applique le principe fondamental de la dynamique à un e^- de masse m_e :

$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\,\vec{E}(0,t) - e\,\underline{\vec{v}} \wedge \vec{B}_0 = i m_e \omega \underline{\vec{v}}$ (E)

$$\underline{\vec{v}} \wedge \vec{B_0} = (\underline{v_x}\,\vec{u_x} + \underline{v_y}\,\vec{u_y})e^{i\omega t} \wedge B_0\vec{u_z}$$
$$= (-B_0 \underline{v_x}\,\vec{u_y} + B_0\underline{v_y}\,\vec{u_x})e^{i\omega t}$$

En projetant l'équation (E) sur $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$ et en simplifiant par $e^{i\omega t}$, on obtient :

$$\begin{cases} i m_e \omega \underline{v_x} = -eE_0 - eB_0 \underline{v_y} \\ i m_e \omega \underline{v_y} = +ieE_0 + eB_0 \underline{v_x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{v_x} = \frac{ie}{m_e\omega}E_0 + \frac{ieB_0}{m_e\omega}\underline{v_y} \\ \underline{v_y} = \frac{e}{m_e\omega}E_0 - i\frac{eB_0}{m_e\omega}\underline{v_x} \end{cases}$$

En posant $\boxed{\alpha = \frac{eE_0}{m_e}}$ et $\boxed{\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}}$ on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{v_x} = \frac{i\alpha}{\omega} + \frac{i\omega_c}{\omega}\underline{v_y} & (1) \\ \underline{v_y} = \frac{\alpha}{\omega} - i\frac{\omega_c}{\omega}\underline{v_x} & (2) \end{cases}}$$

11 -

Pour $\omega = \omega_c$, la norme de la vitesse devient infiniment grande $\Rightarrow$ il y a résonance pour la pulsation cyclotron.
On peut supposer qu'il y a de nombreuses collision dans le plasma qui induisent un échauffement de celui-ci.
Les collisions ne sont pas prises en compte dans le modèle d'où la divergence de $\|\vec{v}\|$.

12 - $\vec{j} = -n_0 e \underline{\vec{v}} = -\frac{i n_0 e^2}{m_e(\omega - \omega_c)}\vec{E}$

D'où $\underline{\vec{E}}$ vérifie l'équation :

$$\vec{\Delta}\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 i \omega \underline{\vec{j}} = + \frac{\mu_0 n_0 e^2 \omega}{m_e(\omega - \omega_c)} \underline{\vec{E}}$$

Or, au vu de l'écriture de $\underline{\vec{E}}$, $\vec{\Delta}\underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}}$ et $\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$ d'où :

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{\vec{E}} = \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e(\omega - \omega_c)}\underline{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\mu_0 c^2 n_0 e^2}{m_e\, \omega(\omega - \omega_c)}\right)$$

or $\mu_0 c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}$ et $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}$

D'où $$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}\right)}$$

13 - AN : $\omega_p = \sqrt{\frac{10^{20} \times (1{,}6.10^{-19})^2}{9{,}1.10^{-31} \times 8{,}85.10^{-12}}}$

$\underline{\omega_p = 5{,}6.10^{11}\ \text{rad.s}^{-1}}$

14 - k^2 étant réel, l'onde ne peut se propager dans le plasma que si $k^2 > 0$ (ie k réel).

C'est le cas si $0 < \omega < \omega_c$ et $\omega > \omega_g$

15 - $\rightarrow$ $$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}}}}$$

$\rightarrow$ $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2\,\omega}{c^2(\omega-\omega_c)}$$

$$2k\,dk = \frac{2\omega\,d\omega}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\left(\frac{\omega-\omega_c-\omega}{(\omega-\omega_c)^2}\right)d\omega$$

$$2k\,dk = \frac{2\omega\,d\omega}{c^2} + \frac{\omega_p^2\,\omega_c}{c^2(\omega-\omega_c)^2}\,d\omega$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2k\,c^2}{2\omega + \frac{\omega_p^2\,\omega_c}{(\omega-\omega_c)^2}}$$

$$\boxed{v_g = c\,\frac{2\omega\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_c)}}}{2\omega + \frac{\omega_p^2\,\omega_c}{(\omega-\omega_c)^2}}}$$

→ pour $\omega = \omega_c$ $v_g \to 0$, l'onde ne se propage pas. On peut peut-être au vu de la question 11 que l'onde est totalement absorbée par le plasma.

Pour pouvoir mieux interpréter les choses, il faudrait un modèle plus élaboré avec prise en compte des collisions entre les particules du plasma qui est d'ailleurs beaucoup plus dense que le plasma ionosphérique.