DM : Ondes électromagnétiques : CCP MP 2013

Partie I : Réflexion d'une onde e.m.

I1- Onde incidente :

a- Grandeur physique se propageant dans l'espace.

b- $\boxed{\vec{k} = k(-\sin i\, \vec{e_y} + \cos i\, \vec{e_z})}$

$\vec{k} = \frac{\omega}{c}(-\sin i\, \vec{e_y} + \cos i\, \vec{e_z})$

c- $\vec{E}(M,t) = E_0\, e^{-j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}\vec{e_x}$

$\vec{E}(M,t) = E_0\, e^{-j(\omega t + k\sin i\, y - k\cos i\, z)}\vec{e_x}$

d- $\vec{rot}\, \vec{E_i} = j\vec{k}\wedge\vec{E_i} = -\frac{\partial \vec{B_i}}{\partial t} = j\omega \vec{B_i}$

d'où $\vec{B_i} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E_i}}{\omega}$

e- $\vec{B_i} = \frac{E_0}{c}(\cos i\, \vec{e_y} + \sin i\, \vec{e_z})e^{-j(\omega t + k\sin i\, y - k\cos i\, z)}$

$\vec{B_i}$ polarisé rect selon la direction du vecteur $\cos i\, \vec{e_y} + \sin i\, \vec{e_z}$.

f- ⚠ Notation réelle

$\vec{E_i} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\vec{e_x}$

$\vec{B_i} = \frac{E_0}{c}(\cos i\, \vec{e_y} + \sin i\, \vec{e_z})\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$

$\vec{R} = \frac{\vec{E_i}\wedge\vec{B_i}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}(-\sin i\, \vec{e_y} + \cos i\, \vec{e_z})\cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$

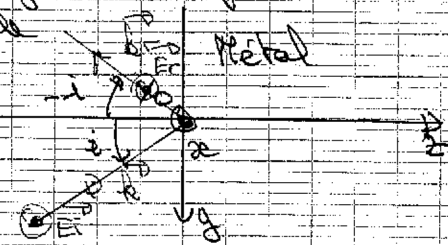
$\vec{k} = k\vec{u}$

$\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\vec{u}$

$\langle\vec{R}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u}$ dans la direction de propagation de l'onde incidente.

I2- Onde réfléchie :

a- Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence. L'angle de réflexion = − angle d'incidence



$\|\vec{k_r}\| = k = \frac{\omega}{c}$

$\vec{k_r} = +k(-\sin i\, \vec{e_y} - \cos i\, \vec{e_z})$

b- $\vec{E_r} = E_{0r}\, e^{-j(\omega t + k\sin i\, y + k\cos i\, z)}\vec{e_x}$

$\vec{B_r} = \frac{\vec{k_r}\wedge\vec{E_r}}{\omega} = \frac{E_{0r}}{c}(-\cos i\, \vec{e_y} + \sin i\, \vec{e_z})\, e^{-j(\omega t + k\sin i\, y + k\cos i\, z)}$

$= \frac{E_0}{c}(\cos i\, \vec{e_y} - \sin i\, \vec{e_z})\, e^{-j(\omega t + k\sin i\, y + k\cos i\, z)}$

d – Sur le plan métallique

$$\vec{E_i}(z=0) + \vec{E_r}(z=0) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$$

$$\vec{B_i}(z=0) + \vec{B_r}(z=0) = \mu_0 \vec{j_S} \wedge (-\vec{u_z})$$

$\forall y,$ $$(E_0 + E_{0r})\, e^{-j(\omega t + k \sin i\, y)} = 0 \text{ sur } \vec{e_x}.$$

$$\underline{E_{0r} = -E_0}$$

e – ⚠ Notation réelle

$$\vec{R_r} = \frac{\vec{E_r} \wedge \vec{B_r}}{\mu_0}$$

$$\vec{E_r} = -E_0 \cos(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r})\,\vec{e_x}$$

$$\vec{B_r} = \frac{E_0}{c}(\cos i\,\vec{e_y} - \sin i\,\vec{e_z})\cos(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r})$$

$$\vec{R_r} = +\frac{E_0^2}{\mu_0 c}(-\cos i\,\vec{e_z} - \sin i\,\vec{e_y})\cos^2(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r})$$

Même direction et sens que $\vec{k_r}$

$$\langle \vec{R_r} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}(-\sin i\,\vec{e_y} - \cos i\,\vec{e_z})$$

$$\langle \|\vec{R_r}\| \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \langle \|\vec{R_i}\| \rangle$$

Les ondes incidentes et réfléchie transportent en moyenne la même puissance

I-3 Onde résultante.

a – $\vec{E_t} = \vec{E_i} + \vec{E_r}$

$$\vec{E_t} = E_0\, e^{-j(\omega t + k \sin i\, y)}\left(e^{+jk\cos i\, z} - e^{-jk\cos i\, z}\right)\vec{e_x}.$$

$$\vec{E_t} = +2E_0\, j \sin(k\cos i\, z)\, e^{-j(\omega t + k\sin i\, y)}\,\vec{e_x}$$

$$\underline{\vec{E_t} = 2E_0 \sin(k\cos i\, z)\sin(\omega t + k\sin i\, y)\,\vec{e_x}}$$

$$\vec{B_t} = \vec{B_i} + \vec{B_r}$$

$$\vec{B_t} = \frac{E_0}{c}e^{-j(\omega t + k\sin i\, y)}\begin{vmatrix} 0 \\ \cos i\,(e^{jk\cos i\, z} + e^{-jk\cos i\, z}) \\ \sin i\,(e^{jk\cos i\, z} - e^{-jk\cos i\, z}) \end{vmatrix}$$

$$\vec{B_t} = \frac{2E_0}{c}e^{-j(\omega t + k\sin i\, y)}\begin{vmatrix} 0 \\ \cos i \cos(k\cos i\, z) \\ 2j \sin i \sin(k\cos i\, z) \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{B_t} = \frac{2E_0}{c}\Big[\cos i\cos(k\cos i\, z)\cos(\omega t + k\sin i\, y)\,\vec{e_y} + \sin i\sin(k\cos i\, z)\sin(\omega t + k\sin i\, y)\,\vec{e_z}\Big]}$$

b – $$\vec{R_t} = \frac{\vec{E_t}\wedge\vec{B_t}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} E_t \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} 0 \\ -E_t B_z \\ E_t B_y \end{vmatrix}.$$

$$\vec{R_t} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c}\Big[-\sin i \sin^2(k\cos i\, z)\sin^2(\omega t + k\sin i\, y)\,\vec{e_y} + \cos i\cos(k\cos i\, z)\sin(k\cos i\, z)\sin(\omega t + k\sin i\, y)\cos(\omega t + k\sin i\, y)\,\vec{e_z}\Big]$$

Onde progressive se propageant ds le sens

... de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k\sin i} = \frac{c}{\sin i}$

$\langle \vec{R}_E \rangle = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin i \sin^2(k\cos i\, z)\, \vec{e}_y$

L'énergie moyenne se propage dans la même direction et dans le même sens que l'onde résultante cad $-\vec{e}_y$.

Partie III Courant dans un conducteur en régime variable.

III 1 – $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

III 2 $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\frac{|j_D|}{|\vec{j}|} = \frac{\varepsilon_0 \omega |E|}{\gamma |E|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} = \frac{2\pi \varepsilon_0 \nu}{\gamma} = \frac{10^8}{6\,10^7 \times 18\cdot 10^9}$

$= \frac{10^8}{108\cdot 10^{16}} = \frac{10^8}{10^{18}} = 10^{-10}$

$\frac{|j_D|}{|j|} \ll 1$

III 3. $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

$= -\Delta\vec{E} = -\frac{1}{\gamma}\Delta\vec{j}$

$= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$

$\vec{j}$ satisfait à l'équation

$\boxed{\Delta\vec{j} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}}$ $\quad \alpha = \mu_0 \gamma$

III 4 – a – $\vec{j} = j(z,t)\,\vec{e}_y$

$\Delta\vec{j} = \frac{\partial^2 j}{\partial z^2}\,\vec{e}_y$

D'où $\boxed{\frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial z^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0}$

b – $\vec{j}(z,t) = J_0\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)}\vec{e}_y$

$\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} = +(1-j)^2 J(z,t)$

$\frac{\partial J}{\partial t} = -j\omega J$

$\left(\left(\frac{1-j}{\delta}\right)^2 + j\mu_0\gamma\omega\right) J = 0$

L'expression vérifie l'eq à condition que

$-\frac{2j}{\delta^2} + j\mu_0\gamma\omega = 0$

c – $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}$

d – AN. $\delta \simeq 2{,}4\,\mu m$

A très haute fréquence les courants sont localisés sur une faible épaisseur au voisinage de la surface du conducteur.

III 5 – $\vec{j}(z,t) = J_0\, e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\vec{e}_y$

$\boxed{\vec{E}(z,t) = \frac{J_0}{\gamma}\, e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\vec{e}_y}$

Puissance volumique dissipée par effet Joule

$P_{vol} = \gamma E^2$

$\langle P_{vol} \rangle = \frac{J_0^2}{2\gamma} e^{-\frac{2z}{\delta}}$

Sur tout le conducteur

$\langle\langle P_J \rangle\rangle = \int_0^{\infty} \frac{J_0^2}{2\gamma} e^{-\frac{2z}{\delta}} S\,dz$

$= \frac{J_0^2}{2\gamma} S \left(-\frac{\delta}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}} \right)_0^{\infty}$

$$\boxed{\langle\langle P_J \rangle\rangle = \frac{J_0^2 S \delta}{4\gamma}}$$