Exercices rayonnement dipolaire .

Exercice 1 : dipôle oscillant.

On considère un dipôle oscillant constitué d'une particule - q fixe en O et une particule P de charge q oscillant le long de (zz') selon $z_P = z_0 \cos(\omega t)$. On se place en coordonnées sphériques d'origine O .

1- Donner le moment dipolaire de ce dipôle.

2- Quelles sont les conditions d'étude du dipôle oscillant ?

3- Le champ magnétique rayonné en M à t dans la zone de rayonnement vaut:

$$\vec{B}(M,t) = \frac{-\mu_0 \omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi c r} e^{-j(\omega t - kr)} \vec{u}_\phi$$

Vérifiez l'homogénéité de l'expression proposée .

4- Quelle est la structure du champ électromagnétique rayonné ? En déduire le champ électrique.

5- Calculer la puissance moyenne rayonnée par ce dipôle.

Exercice 2 :antenne demi-onde

Une antenne filiforme de longueur l , colinéaire à l'axe Oz , centrée à l'origine O , est le siège d'un courant sinusoïdal d'intensité $\underline{I}(z,t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) \exp(jwt)$ avec $\frac{w}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$. On suppose que $l = \frac{\lambda}{2}$ (antenne demi-onde) et que la distance d'observation r = OM vérifie $r \gg \lambda$.

a) Quelle condition doit vérifier le courant sur les extrémités de l'antenne ? Est-ce le cas ici?

b) Quelle est la différence dans la situation décrite avec le dipôle oscillant ? Dans quelle zone est-on?

c) Justifier que la dérivée temporelle du moment dipolaire dp associé à un morceau élémentaire d'antenne entre z et z + dz s'exprime comme $\frac{d(dp)}{dt} = I(z,t)dz$ On travaillera en analogie avec un dipôle constitué de charges fixes variant dans le temps .

d) Justifier, à l'aide de l'expression du cours $\underline{\vec{E}} = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r} \frac{d^2\left(\underline{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{dt^2} \vec{u}_\theta$ que le champ électrique rayonné par un élément dz situé autour d'un point P de l'antenne vaut: $\underline{d\vec{E}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin\theta \, jwI_0 \cos\frac{2\pi z}{\lambda} \exp\left(jw\left(t - \frac{PM}{c}\right)\right) \vec{u}_\theta$

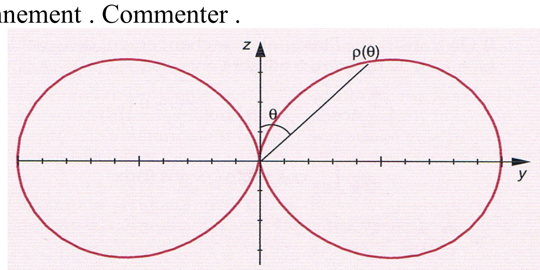
e) Comme M est très éloigné, on supposera, pour intégrer, que les champs rayonnés par chaque élément dz sont émis dans la même direction θ . Exprimer, dans le terme de phase de $\underline{d\vec{E}}$, PM en fonction de r = OM au premier ordre. En déduire, sous forme intégrale. $\underline{\vec{E}}$ *et* $\underline{\vec{B}}$.

f) Calculer explicitement les champs électrique et magnétique rayonnés.

On donne $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \exp(jau) du = \frac{2\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{1 - a^2}$.

g) Préciser le vecteur de Poynting $\vec{R}$ et sa moyenne temporelle < $\vec{R}$ >.

h) On représente l'indicatrice de rayonnement . Commenter .



i) Sachant que $\int_0^{\pi} \frac{cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta \approx 1{,}22$, calculer la puissance moyenne Pm totale rayonnée par l'antenne . On définit la résistance de rayonnement par $P_m = R_r I_{eff}^2$. Est-ce une véritable résistance? Calculer Rr .

Exercice 3 : bleu du ciel et rouge du soleil couchant .
Pour décrire l'interaction entre les molécules de l'atmosphère et le rayonnement électromagnétique du soleil on adopte le modèle suivant appelé modèle de l'électron élastiquement lié :
→ les noyaux atomiques sont fixes
→ chaque électron , masse m_e, est traité indépendamment des autres et considéré comme soumis, en plus de la force exercée par le champ électromagnétique, à une force de rappel élastique $\vec{F}=-m_e\omega_0{}^2\vec{r}$, où $\vec{r}$ est le déplacement de l'électron par rapport à sa position de repos, et à une force dissipative modélisée comme un frottement fluide $\vec{F}_f=\frac{-m_e}{\tau}\frac{d\vec{r}}{dt}$.

On prend pour valeurs des paramètres du modèle : $\omega_0=2{,}0.10^{16}\,rad.s^{-1}$, $\tau\approx10^{-8}\,s$.
1- On étudie le mouvement forcé d'un électron sous l'action du champ électromagnétique d'une onde excitatrice . Le champ électrique de cette onde est donné, en notation complexe, par $\underline{\vec{E}}=E_0\exp(i(\omega t-kz))\vec{u}_x$. On admet que la vitesse de l'électron reste très inférieure à la vitesse de la lumière .
a- Ecrire l'équation du mouvement de l'électron en faisant les approximations classiques .
b- On cherche une solution sous la forme $\underline{\vec{r}}=\underline{\vec{r}_0}\exp(i(\omega t-kz))$. Déterminer $\underline{\vec{r}_0}$.
c- En déduire le moment dipolaire induit sous la forme $\underline{\vec{p}}=\underline{\vec{p}_0}\exp(i(\omega t-kz))$.
On notera e la valeur absolue de la charge de l'électron .
d- Simplifier l'expression de $\underline{\vec{p}_0}$ en tenant compte des valeurs numériques données et sachant que l'onde excitatrice est une onde lumineuse .
Exprimer la puissance moyenne P_{ray} rayonnée par ce dipôle oscillant en fonction de E_0 et ω et de paramètres caractéristiques du modèle .
f- Expliquer à l'aide de ce modèle la couleur bleue du ciel .
2- a- Rappeler l'expression de l'intensité I de l'onde excitatrice (moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting) en fonction de E_0 .
b- Exprimer la puissance rayonnée sous la forme $P_{ray}=\sigma(\omega)I$. Quelle est la dimension de $\sigma(\omega)$?
c- On suppose que le milieu contient N électrons par unité de volume . L'énergie rayonnée par ces électrons est prélevée à l'onde incidente ce qui fait que l'intensité I(z) diminue avec z . En faisant un bilan de puissance sur un cylindre dont les bases sont dans les plans z et z+dz, établir une équation différentielle de la forme $\frac{dI}{dt}+\frac{I(z)}{\delta}=0$ où δ est fonction de ω et des paramètres du modèle. Résoudre cette équation . Quelle est la signification physique de δ ?
d- Application numérique : $N=3{,}0.10^{26}m^{-3}, e=1{,}6.10^{-19}C, m_e=9{,}1.10^{-31}kg, \mu_0=4\pi.10^{-7}H.m^{-1}$. Calculer δ pour une lumière bleue ($\lambda_{bleu}=0{,}45\,\mu m$) et pour une lumière rouge ($\lambda_{rouge}=0{,}75\,\mu m$) .
e- Expliquer, à l'aide de ce modèle , la couleur du soleil couchant .