EXERCICES PROPAGATION D'UNE ONDE DANS UN PLASMA .

Exercice 1 :plasma interstellaire

Un plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse m_e et de charge $-e$, de densité volumique n_0 et en mouvement non relativiste. Des ions sont également présents, mais sont supposés immobiles.
Ce plasma est localement neutre et le reste au passage d'une onde électromagnétique. Avec ces hypothèses, on cherche des solutions des équations de Maxwell sous forme d'ondes planes progressives monochromatiques (OPPM) de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)=\underline{\vec{E}_0}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad \underline{\vec{B}}(\vec{r},t)=\underline{\vec{B}_0}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$$

1 - Montrer que de telles solutions n'existent que si la densité de courant $\underline{\vec{j}}$ est elle-même une OPPM de même vecteur d'onde et de même pulsation, c'est-à-dire de la forme : $\underline{\vec{j}}(\vec{r},t)=\underline{\vec{j}_0}e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$

2- Montrer que $\underline{\vec{j}}$ est orthogonal à $\vec{k}$.

3- Écrire l'équation du mouvement d'un électron et montrer que l'effet du champ magnétique y est négligeable. Montrer alors que les vecteurs $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont colinéaires et déterminer la conductivité $\underline{\gamma}$ du plasma. Commentaire ?

4- À l'aide des équations de Maxwell, exprimer $\underline{\vec{j}}$ en fonction de $\omega, \vec{k}\, et\, \underline{\vec{E}}$ et des constantes. En déduire une nouvelle expression de $\underline{\gamma}$.

5- Déterminer alors la relation de dispersion $\underline{\gamma}$.

6- En posant $K=\sqrt{\dfrac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}}$, établir les expressions des vitesses de phase v_φ et de groupe v_g des ondes dans le plasma. Commentaire ?

Deux trains d'ondes, de longueurs d'onde respectives λ_1 et $\lambda_2 > \lambda_1$ sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance L. On suppose $K^2\lambda_1{}^2 \ll 1$ et $K^2\lambda_2{}^2 \ll 1$.

7- Montrer que le terme principal dans la différence $\delta t = t_2 - t_1$ des temps de réception des deux ondes est donné par : $\delta t=\dfrac{L K^2}{8\pi^2 c}(\lambda_2{}^2-\lambda_1{}^2)$

8- Des mesures de dispersion à partir de signaux émis par des pulsars dont la distance est connue donnent $n_0 = 2{,}8 . 10^4 m^{-3}$. Calculer δt dans ces conditions, pour deux signaux de longueurs d'onde $\lambda_1 = 0{,}4$ µm et $\lambda_2 = 0{,}8$ µm, émis par une étoile située à $L = 1 \times 10^3$ années lumières.

Exercice 2 :Réflexion-transmission à la surface d'un plasma

Un plasma occupe le demi-espace x > 0. On rappelle qu'une OPPH électromagnétique de vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}=\underline{k}\,\vec{u}_x$ peut se propager dans ce milieu à condition que la composante $\underline{k}$ soit reliée à la pulsation ω par la relation de dispersion (ωp étant la pulsation plasma) : $\underline{k}^2=\dfrac{\omega^2-\omega_p{}^2}{c^2}$

Le demi-espace x < 0est le vide. Une OPPH polarisée rectilignement, appelée onde incidente (*Oi*), se propage dans cet espace en direction du plasma. L'interface $x = 0$ donne naissance à une onde réflechie (*Or*) et à une onde transmise (*Ot*). Les champs électriques associés à ces ondes sont :

$$\begin{cases} \underline{\vec{E}}_i &= E_0 \exp[i(k_i\, x - \omega t)]\vec{u}_y \\ \underline{\vec{E}}_r &= \underline{r}\, E_0 \exp[-i(k_r\, x + \omega t)]\vec{u}_y \\ \underline{\vec{E}}_t &= \underline{t}\, E_0 \exp[i(\underline{k}\, x - \omega t)]\vec{u}_y \end{cases}$$

où r et t sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. On définit l'indice complexe du plasma par $\underline{n}=\frac{c\underline{k}}{\omega}$.

1- Donner les expression de k_i et de k_r en fontion de ω .

2- Déterminer les champs magnétiques $\underline{\vec{B}}_i, \underline{\vec{B}}_r \, et \, \underline{\vec{B}}_t$ associés aux trois ondes.

Il n'y a aucune charge ni aucun courant à la surface du plasma. Cela signifie que les champs électrique et magnétique sont continus à l'interface.

3- Écrire les relations de continuité en x = 0 et en déduire deux relations liant *r* et *t*.

4- En déduire les expressions de *r* et *t* en fonction de $\underline{n}$.

5-Déterminer les valeurs moyennes $\langle\underline{\vec{\Pi}}_i(x=0)\rangle, \langle\underline{\vec{\Pi}}_r(x=0)\rangle \, et \, \langle\underline{\vec{\Pi}}_t(x=0)\rangle$ des vecteurs de Poynting en $x = 0$. Les exprimer en fonction de $|\underline{r}|^2, |\underline{t}|^2 \, et \, n'=\Re(\underline{n})$.

On définit les coefficients de réflexion et de transmission en énergie par :

$$R = \frac{\|\langle\vec{\Pi}_r(x=0)\rangle\|}{\|\langle\vec{\Pi}_i(x=0)\rangle\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\langle\vec{\Pi}_t(x=0)\rangle\|}{\|\langle\vec{\Pi}_i(x=0)\rangle\|}$$

6- Calculer *R* et *T* en fonction de ω et ω_P dans les deux cas $\omega > \omega p$ et $\omega < \omega p$.

7- Que peut-on dire de *R* + *T* dans les deux cas ?