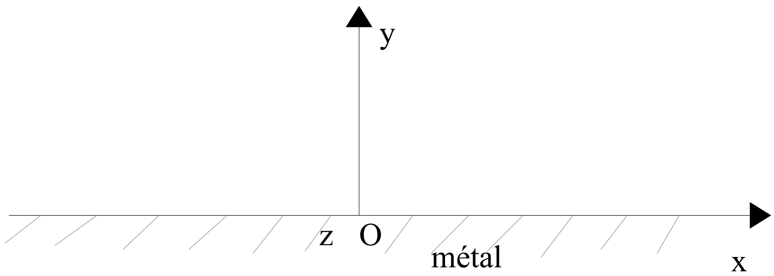
EXERCICES ONDES METAL .

Exercice 1 :réflexion sous incidence normale d'une onde circulaire

On considère la réflexion sur un métal parfait d'une oppm monochromatique de pulsation ω , se propageant dans le sens des y décroissants, de polarisation circulaire droite telle que en y=0 et à t=0 le champ électrique associé à cette onde incidente s'écrit $\vec{E}_i(0,0)=E_0\vec{e}_x$.



1- Déterminer en notation réelle puis complexe le champ électrique associé à l'onde incidente . Déterminer le champ magnétique associé .
2- Donner le vecteur d'onde de l'onde réfléchie . Déterminer l'onde réfléchie sous la forme d'une oppm . Quelle est sa polarisation ?
3- Calculer le champ électrique résultant dans le demi espace y> 0 . Déterminer les nœuds et les ventres du champ électrique .

Exercice 2 : Modes propres d'une cavité sans pertes .
Une cavité sans pertes d'axe Ox et de longueur L est constituée par l'association de deux miroirs métalliques parfaits confondus respectivement avec les plans x = O et x = L. On suppose qu'à l'intérieur de la cavité le champ électrique d'une onde monochromatique polarisée selon $\vec{u}_z$ a pour représentation complexe : $\vec{E}(x,t)=E_1\exp(i(wt-kx))\vec{u}_z+E_2\exp(i(wt+kx))\vec{u}_z$

1. Quelles sont les conditions aux limites imposées par la présence d'un métal parfait en x = 0 et x = L ?

2. En déduire l'expression de E2 en fonction de E1 et la suite fn, des valeurs possibles de la fréquence de telles ondes pouvant exister dans la cavité. On exprimera fn en fonction d'un entier naturel n non nul et d'une fréquence particulière f1 dépendant de L et de c. Ces fréquences correspondent aux modes propres de la cavité.

3. a) Établir l'expression $\vec{E}_n(x,t)$ du champ électrique dans la cavité à la fréquence fn en fonction de E1 , n , x, L et c .

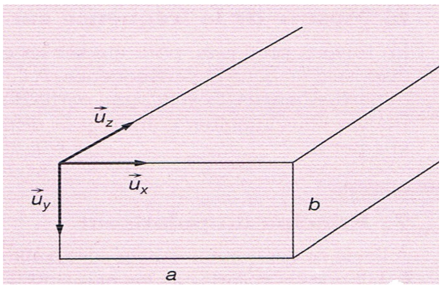
b) Justifier l'expression d'onde stationnaire qu'on donne à ce type d'onde.

c) Montrer qu'il existe des abscisses xp où le champ électrique est constamment nul. Donner la distance entre deux valeurs consécutives de xp .

d) En déduire le champ magnétique $\vec{B}_n(x,t)$ associé à cette onde. Expliciter les abscisses xp' des points où le champ magnétique est constamment nul.

Exercice 3:propagation guidée .

Une cavité vide, invariante par translation selon $\vec{u}_z$ est taillée dans un conducteur parfait. Sa section est un rectangle de côtés a et b .



On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique le long de la direction $\vec{u}_z$:

$\underline{\vec{E}}(M,t)=f(x,y)\exp(i(wt-kz))\vec{u}_y$ où f est une fonction à déterminer.

a) Commenter la forme de cette onde et notamment le fait que f ne dépende pas de z.

b) En utilisant une équation de Maxwell, montrer que f ne dépend en fait que d'une seule variable.

c) À l'aide de l'équation de propagation du champ électrique, trouver une équation différentielle en f.

d) La résoudre en utilisant les conditions aux limites.

e) Exprimer le champ électrique $\underline{\vec{E}}$ et commenter le résultat obtenu.

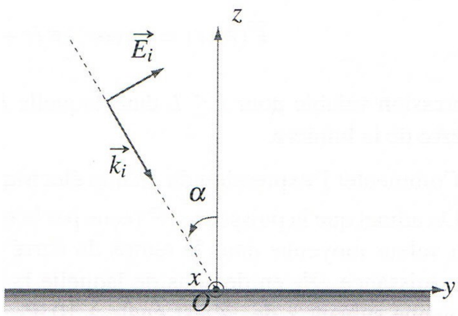
f) Montrer que ce champ électrique ne peut se propager qu'à partir d'une fréquence minimale fc. Quel type de filtrage effectue le guide ? Calculer f pour a= 1 cm et préciser le domaine spectral correspondant.

Donner un exemple pratique de propagation guidée .

Exercice 4 :réflexion sur un métal sous incidence oblique .

Une onde plane monochromatique polarisée rectilignement, de pulsation w, de vecteur d'onde $\vec{k}_i$ se propage dans le vide et arrive avec l'angle d'incidence α sur la surface d'un métal parfaitement conducteur qui occupe le demi-espace z < O. $\vec{k}_i$ est contenu dans le plan (Oyz).

On suppose que le champ électrique $\vec{E}_i$ de l'onde incidente est compris dans le plan d'incidence (Oyz). Il est représenté sur la figure tel qu'il est à l'instant t = O au point O (les dimensions de la figure sont très inférieures à la longueur d'onde); sa norme a alors sa valeur maximale Eo .



1. Exprimer les composantes de $\vec{k}_i$ et $\underline{\vec{E}_i}(M,t)$.

2. Montrer qu'il doit exister une onde réfléchie. On admet qu'il s'agit d'une OPPM et que la direction de son vecteur d'onde $\vec{k}_r$ est donnée par la loi de Descartes de l'optique géométrique. Représenter $\vec{k}_r$ et exprimer ses composantes .

3. Représenter le champ électrique de l'onde réfléchie $\vec{E}_r(M,t)$ en O à t = 0 afin que les conditions aux limites sur le champ réfléchi soient respectées . Retrouver par les calculs les composantes de $\underline{\vec{E}_r}(M,t)$

4. Représenter les champs magnétiques $\vec{B}_i\, et\, \vec{B}_r$, des deux ondes tels qu'ils sont à t = 0 en O.

5.Déterminer le champ électrique résultant dans le vide . Commenter sa structure .

6. Déterminer la densité surfacique de charge sur le plan métallique . Des courants se développent-ils sur le plan métallique ?

Exercice 5:conductivité d'un métal en régime variable

On considère un conducteur métallique comprenant :

- des ions positifs fixes .
- Des électrons de conduction de masse m_e , de densité particulaire n_0 libres de se déplacer dans le métal .

Le métal étant un milieu dense , on doit tenir compte des collisions entre les électrons et les ions du réseau . Pour cela , on fait l'hypothèse que chaque électron est soumis de la part du réseau cristallin à une force égale à $\frac{-m_e}{\tau}\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron et τ une constante appelée temps de collision .

On étudie la propagation dans le conducteur d'une OPPM :

$$\underline{\vec{E}}(M,t)=\underline{\vec{E}_o}\exp(i(wt-\underline{\vec{k}}.\vec{r})) \qquad \underline{\vec{B}}(M,t)=\underline{\vec{B}_o}\exp(i(wt-\underline{\vec{k}}.\vec{r}))$$

1- Déterminer l'équation du mouvement d'un électron .

2- En ne gardant que les termes prépondérants , déterminer la vitesse complexe $\underline{\vec{v}}$ d'un électron en régime forcé .

3- Déterminer la densité volumique de courant , en déduire que l'on peut définir une conductivité complexe $\underline{\gamma}$.

4- Quelle est l'expression de la conductivité en régime stationnaire ? Donner un ordre de grandeur de τ pour un métal bon conducteur . Déterminer pour quelles gammes de fréquences la conductivité peut-être considérée comme réelle . On supposera cette condition vérifiée par la suite .

5- Déterminer la relation de dispersion dans le métal (on négligera les termes relatifs aux courants de déplacement) .

6- On considère une onde telle que $\underline{\vec{k}}=\underline{k}\,\vec{u}_z$. Donner la forme de $\underline{k}$, interpréter la forme de l'onde obtenue .

7- On se place dans le cas des basses fréquences , dans ce cas on peut négliger les courants de déplacement devant les courants de conduction , donner la nouvelle relation de dispersion ainsi que l'expression du champ électrique , introduire une longueur caractéristique .

8- Déterminer la densité volumique de courants dans le conducteur .

9- Expliquer le principe physique d'un four à micro onde .

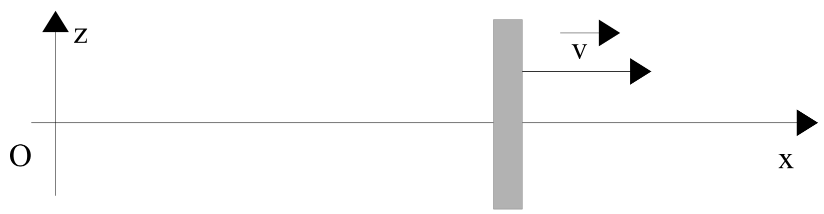
Quelle est la structure du revêtement de la porte ? Estimer un ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque métallique de la porte ainsi que la dimension des orifices percés dans celle-ci . Le fréquence des micro ondes est de 2,5 GHz .

$\mu_0=4\pi.10^{-7}\,H.m^{-1}$ Pour un métal $n_0\,de\,l'\,ordre\,de\;10^{28}\,m^{-3}$

Exercice 6:réflexion sur un miroir mobile, effet Doppler

Une plaque métallique parfaitement conductrice, plane et perpendiculaire à (Ox) se déplace à la vitesse uniforme $\vec{v}=v\,\vec{u}_x$; elle coïncide à l'instant t avec le plan d'équation x = vt .

Une onde électromagnétique dont le champ électrique est : $\vec{E}_i(x,t)=E_0\cos(\omega_i(t-\frac{x}{c}))\vec{u}_z$ se réfléchit sur cette surface, le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrivant : $\vec{E}_r(x,t)=E_r\cos(\omega_r(t+\frac{x}{c}))\vec{u}_z$



Pour exprimer la réflexion de l'onde et vérifier les conditions aux limites, il convient d'étudier la réflexion dans le référentiel R' en translation par rapport à R et dans lequel la plaque est immobile . En notant $(\vec{E},\vec{B})$ un champ électromagnétique dans R et $(\vec{E}',\vec{B}')$ le même champ évalué dans R', on indique que : $\vec{E}'=\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}$ et $\vec{B}'=\vec{B}$.

1- Exprimer $\vec{B}_i$ en fonction de $E_{0,}c,\omega_i,t\,et\,x$ puis $\vec{E}'_i$ en fonction de $E_{0,}c,\omega_i,t,x\,et\,v$.

2- - Exprimer $\vec{E}'_r$ en fonction de $E_r,c,\omega_r,t,x\,et\,v$.

3- A la surface de la plaque $\vec{E}'_i+\vec{E}'_r$ doit être orthogonal à la plaque.

a- En déduire ω_r en fonction de $\omega_i,v\,et\,c$. Donner une valeur approchée pour v << c .

b- Donner E_r en fonction de $E_{0,}v\,et\,c$. Cas v << c .

<u>Exercice 7:</u>cavité réelle, coefficient de qualité .

On délimité une cavité par deux plans métalliques parallèles coïncidant avec les plans z =0 et z=L . On prend pour expression du champ magnétique dans la cavité :

$$\vec{B}_{cavité}=B_0\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\omega t)\vec{u}_y \quad \text{avec} \quad \omega=\frac{\pi c}{L}$$

et dans le demi-espace z > L occupé par le métal de conductivité γ :

$$\vec{B}_{métal}=-B_0\exp\left(-\frac{z-L}{\delta}\right)\cos\left(\omega t-\frac{z-L}{\delta}\right)\vec{u}_y \quad \text{avec} \quad \delta=\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

1- On donne L = 3cm, $\gamma=2.10^7\,S.m^{-1}$, $\epsilon_0=8{,}85.10^{-12}\,F.m^{-1}$. Calculer la fréquence et vérifier que, dans le métal les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction . Comparer δ et L .

2- Exprimer l'énergie électromagnétique moyenne < U_{em} > contenue entre les deux plans en fonction de $B_{0,}L\,et\,S$ surface des plans conducteurs .

3- Exprimer la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule en un point d'abscisse z > L en fonction de $B_{0,}\gamma,\delta\,et\,z$. En déduite la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans tout le volume du conducteur z > L en fonction de $B_{0,}\gamma,\delta\,et\,S$.

4- On définit le facteur de qualité de la cavité par : $Q=2\pi\dfrac{énergie\ emmagasinée}{énergie\ dissipée\ pendant\ une\ période}$.

Exprimer le facteur de qualité de la cavité en fonction de L et δ , puis en fonction de γ et de la longueur d'onde λ associée à la fréquence propre de la cavité .

<u>Exercice 6:</u>propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isolant dilué

On se propose d'étudier le modèle simplifié suivant de la propagation d'une onde dans un milieu neutre dilué . On appelle n_0 le nombre d'électrons par unité de volume et on suppose que seul le mouvement des électrons est à prendre en compte . Sous l'action du champ électrique $\vec{E}=E\,\vec{u}_x$, les électrons o,nt un mouvement qui lui est colinéaire et que l'ont peut caractériser par l'équation différentielle :

$$m_e\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-f\frac{dx}{dt}-eE$$ où x est le déplacement de l'électron, k et f des constantes du modèle .

On posera $\omega_0=\dfrac{k}{m_e},\ \tau=\dfrac{m_e}{f}\ et\ \omega_P{}^2=\dfrac{n_0e^2}{\epsilon_0 m_e}$.

Une onde plane monochromatique de pulsation ω , de polarisation rectiligne selon $\vec{u}_x$, se propage dans la direction de $\vec{u}_z$ dans ce milieu, son champ électrique s'écrit : $\underline{\vec{E}}=E_0\exp(i(\omega t-kz))\vec{u}_x$

1- Comparer l'équation différentielle à celle du modèle du plasma vu en cours . Quels sont les termes supplémentaires ? A quelles propriétés physiques correspondent-ils ?

2- Chercher la solution correspondant au régime forcé, soit $\underline{x}(z,t)=\underline{x_0}\exp(i(\omega t-kz))$.

3- En déduire, en notation, complexe, la densité volumique de courant due au mouvement des électrons . Montrer que la densité volumiques de charge est nulle .

4- A partir des équations de Maxwell, établir une équation aux dérivées partielles liant $\vec{E}$ et la densité volumique de courant .

5- En déduire la relation de dispersion du milieu . Quel phénomène traduit le fait k est complexe ?

6- Dans cette question, on suppose que f = 0 et que $\omega_0\gg\omega$. L'indice du milieu pour la pulsation ω

est défini par la relation : $v_\phi = \frac{c}{n}$ où v_ϕ est la vitesse de phase .

Montrer que le modèle permet de retrouver la loi de Cauchy : $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ où λ est la longueur d'onde dans le vide d'une onde de pulsation ω et A et B des constantes caractéristiques du milieu . Exprimer A et B en fonction de $\omega_{0,} \omega_P et\ c$.