SPE MP

Propagation d'une onde dans un métal . Réflexion sur un métal parfait .

<u>But:</u>étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans un métal et la réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un conducteur parfait .

A- Propagation d'une onde dans un conducteur ohmique, effet de peau :

I- Hypothèse du régime lentement variable, conséquences :

1- Conditions d'application de la loi d'Ohm locale (rappel) :

Un conducteur ohmique est un milieu dans lequel la loi d'Ohm locale s'applique :

$\boxed{\vec{j}(M,t)=\gamma\vec{E}(M,t)}$ **avec** γ **réel positif de l'ordre de** $10^7 S.m^{-1}$ **pour un bon conducteur**

A partir du modèle simple de Drüde (chapitre énergie électromagnétique) nous avons vu que cette loi était applicable dans un métal pour des **fréquences très inférieures à 10^{13} Hz** .
Nous nous placerons dans ce cadre dans la suite du cours .

2- Première conséquence : métal localement neutre (rappel) :
Etablissons l'équation de relaxation de la densité volumique de charge en un point M et déterminons l'évolution au cours du temps de la densité volumique de charge en supposant qu'elle est non nulle à l'instant initiale :

Pour un bon conducteur $\gamma\approx 10^7 S.m^{-1}$ $\epsilon_0=\frac{1}{36\pi.10^9}F.m^{-1}$ $\tau_0=8,8.10^{-19}s$

Même pour un conducteur de conductivité moyenne τ_0 reste très faible .
Si localement la densité volumique de charge, à un instant, est non nulle , elle tendra très rapidement vers zéro .

Le conducteur ohmique est localement neutre, d'où dans le conducteur ρ (M , t) = 0 en tout point et à tout instant .

2- Deuxième conséquence : courant de déplacement négligeable :
Supposons $\underline{\vec{E}}(M,t)=\underline{\vec{E}_0}e^{i(wt-\vec{k}.\vec{r})}$ et comparons les normes des vecteurs densité de courant de conduction et densité de courant de déplacement dans un conducteur ohmique .

On a vu que $\tau_0 \approx 10^{-18} s$, on a vu également que la loi d'ohm était vérifiée pour des temps caractéristiques des ondes supérieurs à $10^{-13} s$, dans le domaine de fréquences dans lequel le conducteur sera étudié (hyperfréquences) on aura $\tau_0 w \ll 1$ d'où $\|\vec{j}_D\| \ll \|\vec{j}\|$.
A l'intérieur d'un conducteur ohmique , on pourra négliger les courants de déplacement devant les courants de conduction .

3- Equations de Maxwell dans un conducteur ohmique en régime lentement variable :

II- Propagation d'une onde dans un métal :

1- Equation de propagation dans un conducteur ohmique :

2- Propagation d'une onde monochromatique :

→ On considère une onde sous la forme $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}_0} e^{i(wt-\underline{k}z)}$ onde progressive se propageant dans le sens des z croissants dans le métal .

Déterminons la relation de dispersion dans le métal :

→ On peut également chercher une onde sous la forme $\vec{\underline{E}}(M,t)=\underline{E}(z,t)\vec{u}_x=\underline{f}(z)e^{iwt}\vec{u}_x$ par exemple :

→ Calcul du champ magnétique :

3- Structure de l'onde dans le métal :

$\vec{E}(M,t)=E_0 e^{\frac{-z}{\delta}}\cos(wt-\frac{z}{\delta})\vec{u}_x$ $\vec{B}(M,t)=\frac{E_0\sqrt{2}}{\delta w}e^{\frac{-z}{\delta}}\cos(wt-\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4})\vec{u}_y$

Remarques et applications :
→ Pour un conducteur donné, δ dépend de la fréquence de l'onde . Plus la fréquence est élevée, plus δ est faible .
Ordres de grandeurs pour le Cu $\gamma = 6.10^7 S.m^{-1}$

$f = 50\,Hz , \delta = 9\,mm$

$f = 1\mathrm{M}\,Hz , \delta = 65\,\mu m$

$f = 1\,GHz , \delta = 2\,\mu m$ une onde de téléphonie mobile est totalement absorbée par un feuillet de cuivre épais de quelques microns.

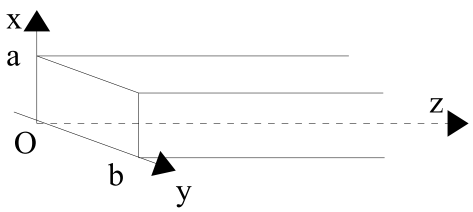
Une des applications est le CND (contrôle non destructif) par courants de Foucault, on envoie une onde em sur un matériau conducteur, celle-ci pénètre plus ou moins profondément dans le matériau selon la fréquence utilisée et permet de sonder ce dernier sur des profondeurs plus ou moins grandes .

→ δ dépend de γ , plus γ est grand, plus δ est faible, les bons conducteurs peuvent être utiliser pour réaliser du blindage em .
Pour les composites carbones (composant essentiellement les avions) $\gamma \approx 10^4\, S.m^{-1}$ ce qui entraîne une valeur de δ beaucoup plus grande que pour un métal, ceci les rend plus vulnérables aux bombes électromagnétiques .
Eau de mer $\gamma \approx 1\, S.m^{-1}$ $\delta \approx \dfrac{500}{\sqrt{f(en\ Hz)}} en\ m$ les sous-marins utilisent, pour communiquer, des ondes radio de très basses fréquences entre 3 et 30 kHz .

→ On retrouve le même type d'effet en diffusion thermique .

4- Bilan énergétique : (notation réelle)

→ $\boxed{\langle \vec{j}\vec{E} \rangle \neq 0}$ **au cours de sa propagation, l'onde cède de la puissance aux porteurs de charge, l'onde s'atténue au cours de sa propagation .**
→ Puissance moyenne entrant dans le conducteur :
Supposons que le conducteur occupe le demi-espace z > 0, calculons la puissance entrant par une section ab du conducteur située en z = 0 .



→ Puissance totale moyenne dissipée dans le conducteur par effet Joule dans un volume de section ab :

Toute la puissance entrante est dissipée par effet Joule à l'intérieur du conducteur .

5- Dispersion des ondes électromagnétiques dans un conducteur :

B- Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait :

I- Définition et propriétés d'un conducteur parfait :

→ Conducteur parfait:conducteur ohmique à toute fréquence dont la conductivité tend vers l'infini . Dans ce cas l'épaisseur de peau tend vers 0 .

Remarque:dans la pratique, la conductivité d'un conducteur ne peut pas être infinie . Un conducteur pourra être considéré comme parfait si δ << longueur caractéristique du problème étudié c'est à dire λ .

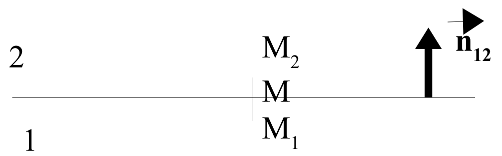
Une onde incidente ne pourra pas pénétrer dans le métal .
Dans le métal $\vec{E}=\vec{0}$ et $\vec{B}=\vec{0}$ d'où $\vec{j}=\vec{0}$ et $\rho=0$, s'ils existent des charges et courants, ils sont localisés sur la surface du conducteur .

→ On peut retrouver ces propriétés à partir des équations de Maxwell .

II- Réflexion sous incidence normale d'une onde plane progressive monochromatique sur un conducteur parfait :

1- Position du problème :

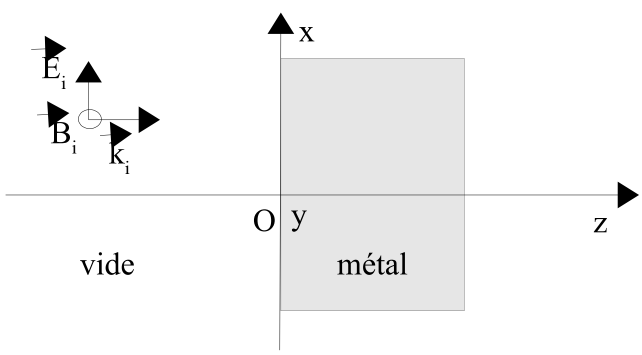
a- Relations de passage du champ électromagnétique :



$\vec{E}(M_{2,}t)-\vec{E}(M_{1,}t)=\frac{\sigma(M,t)}{\epsilon_0}\vec{n_{12}}$ M_1 et M_2 étant deux points infiniment voisins de M respectivement situés dans les milieu 1 et 2 et σ (M ,t) la densité surfacique de charge au point M à t .

$\vec{B}(M_{2,}t)-\vec{B}(M_{1,}t)=\mu_0\vec{j_S}(M,t)\wedge\vec{n_{12}}$ $\vec{j_S}(M,t)$ étant la densité surfacique de courant en M à t .

b- Problème étudié :



On considère une oppm polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$ arrivant sous incidence normale sur un plan métallique parfait .
Le champ électrique total dans le vide doit vérifier la condition aux limites en z= 0 .

Le champ électrique de l'onde incidente s'écrit $\vec{E}_i(M,t)=E_{i0}\cos(wt-kz)\vec{u}_x$ d'où $\vec{E}_i(0,t)=E_{i0}\cos(wt)\vec{u}_x$. Le champ électrique incident seul ne vérifie pas les conditions aux limites .
En plus de l'onde incidente, il faut donc supposer l'existence d'une onde réfléchie .
Physiquement, l'onde électromagnétique incidente, de pulsation w, va mettre en mouvement les électrons de la surface du métal entraînant la création de courants de pulsation w qui eux même vont créer une onde réfléchie de pulsation w .

2- Calcul des champs :(notation complexe) :

On peut introduire les coefficients de réflexion en amplitude : M_0 étant un point du plan métallique (z = 0)

→ pour le champ électrique $\underline{r_E}=\frac{\underline{E_r}(M_0,t)}{\underline{E_i}(M_0,t)}=-1$

→ pour le champ magnétique $\underline{r_B}=\frac{\underline{B_r}(M_0,t)}{\underline{B_i}(M_0,t)}=1$

La réflexion du champ électrique sur le plan métallique parfait s'accompagne d'un déphasage de π .
Le champ magnétique ne subit aucun déphasage à la réflexion .
Des courants se développent sur le plan métallique, la densité surfacique de courant $\vec{j}_S$ vérifie $\vec{B}_i(0,t)+\vec{B}_r(0,t)=-\mu_0\vec{j}_S\wedge\vec{u}_z$, ces courants sont à l'origine de l'onde réfléchie et de la force pressante subie par le plan métallique .

3- Onde résultante dans le milieu incident :

→ Expression des champs :

→ Caractérisation de l'onde résultante :
On ne retrouve pas la forme en $\omega t - kz$ ou $z - ct$ caractéristique d'une onde progressive : il y a découplage entre les dépendances spatiales et temporelles.

L'onde résultante ne se propage pas, les champ électrique et magnétique vibrent sur place : **l'onde est stationnaire .**
$\vec{E}$ et $\vec{B}$ **vibrant en quadrature, les nœuds de** $\vec{B}$ **coïncident avec les ventres de** $\vec{E}$ **, les ventres de** $\vec{B}$ **coïncident avec les nœuds de** $\vec{E}$ **.**
Les plans nodaux (ou ventraux) des champs sont distants de $\frac{\lambda}{2}$ **. Un plan nodal et un plan ventral consécutifs sont distants de** $\frac{\lambda}{4}$.

Remarque 1:
Nous avons vu que l'onde stationnaire correspond à la superposition de deux oppm de même pulsation , de même amplitude et se propageant en sens inverse l'une de l'autre .
Inversement une oppm est la superposition de deux ondes stationnaires en quadrature .
$$A\cos(wt - kx + \phi) = A\cos(kx - \phi)\cos(wt) + A\sin(kx - \phi)\sin(wt)$$

Remarque 2:
Des courants de densité $\vec{j}_S$ se développent sur le plan métallique .
$$\vec{B}(z=0,t) = \frac{2E_0}{c}\cos(wt)\vec{u}_y = -\mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z$$
$$\vec{u}_z \wedge \frac{2E_0}{c}\cos(wt)\vec{u}_y = -\mu_0 \vec{u}_z \wedge (\vec{j}_S \wedge \vec{u}_z)$$
D'où $\frac{-2E_0}{c}\cos(wt)\vec{u}_x = -\mu_0 \vec{j}_S$ donc $\vec{j}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(wt)\vec{u}_x$

Remarque 3 :
Le champ $\vec{B}(z=0,t)$ exerce sur les courants surfaciques des actions mécaniques . On montre que sur un élément de surface s'exerce une force $\vec{dF}=(\frac{1}{2}\vec{j}_S\wedge\vec{B}(z=0))dS=\frac{2E_0{}^2}{\mu_0 c^2}cos^2(wt)dS\,\vec{u}_z$

D'où $\langle\vec{dF}\rangle=\epsilon_0 E_0{}^2 dS\,\vec{u}_z$, $\langle\vec{dF}\rangle$ a les caractéristiques d'une force pressante , $P=\epsilon_0 E_0{}^2$ est appelée pression de radiation .

4- Aspect énergétique :
→ Déterminons les vecteurs de Poynting moyens des ondes incidente et réfléchie .

Pour l'onde incidente : $\vec{\Pi}_i=\frac{\Re(\underline{\vec{E}_i})\wedge\Re(\underline{\vec{B}_i})}{\mu_0}=\frac{E_0{}^2}{\mu_0 c}cos^2(wt-kz)\vec{u}_z$

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}_i\rangle=\frac{E_0{}^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_z}$$

Pour l'onde incidente : $\vec{\Pi}_r=\frac{\Re(\underline{\vec{E}_r})\wedge\Re(\underline{\vec{B}_r})}{\mu_0}=\frac{-E_0{}^2}{\mu_0 c}cos^2(wt+kz)\vec{u}_z$

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}_r\rangle=\frac{-E_0{}^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_z}$$

On peut déterminer le coefficient de réflexion en puissance (ou en énergie) : rapport les puissances moyennes réfléchie et incidente .

$$\boxed{r_P=\frac{\|\langle\vec{\Pi}_r\rangle\|}{\|\langle\vec{\Pi}_i\rangle\|}=1}$$

Toute la puissance incidente est réfléchie sur le plan métallique, ce qui est logique compte tenu du fait qu'aucune puissance n'est dissipée dans le métal .

→ Onde résultante :

$$\vec{\Pi}=\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}=\frac{4E_0{}^2}{\mu_0 c}\sin(kz)\cos(kz)\sin(wt)\cos(wt)\vec{u}_z=\frac{E_0{}^2}{\mu_0 c}\sin(2kz)\sin(2wt)\vec{u}_z$$

$\langle\vec{\Pi}\rangle=\vec{0}$ sur une période il y a autant de puissance se propageant dans le sens des z croissants et dans le sens des z décroissants .

III- Cavité électromagnétique :

Une cavité électromagnétique est un volume vide délimités par des parois conductrices .
Si un champ électromagnétique est injecté dans la cavité, des ondes stationnaires peuvent apparaître . Les fréquences de ces ondes ont des valeurs bien particulières quantifiées par un entier n et dépendant des dimensions de la cavité, ce sont **les fréquences propres de la cavité** .

1- Recherche des ondes stationnaires dans une cavité .
Les parois conductrices délimitant la cavité seront supposées comme des conducteurs parfaits .

On envoie, dans la cavité, une oppm se propageant par exemple dans le sens des z croissants . Elle se réfléchit sur le plan z= L, l'onde réfléchie, se réfléchit à son tour sur le plan d'équation z = 0 et ainsi de suite . On obtient dans la cavité une superposition d'ondes de même amplitude et se propageant en sens inverse, l'onde résultante est donc stationnaire .

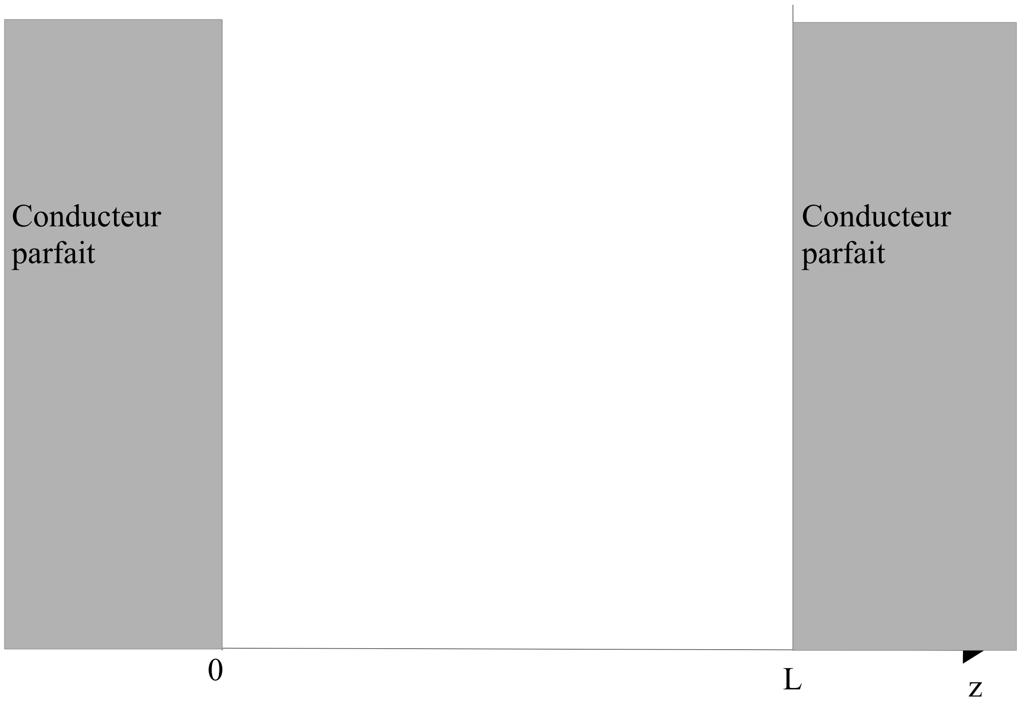
On cherche une onde stationnaire polarisée selon $\vec{u_x}$ telles $\vec{E}(M,t)=f(z)g(t)\vec{u_x}$ avec $f \; et \; g$ fonctions réelles de classe C² .

Remarque :
1- Analogie avec les modes propres d'une corde vibrante . En effet, les grandeurs vérifient une EDP de même type (équation de d'Alembert) et des conditions aux limites identiques .

2- On retrouve rapidement les valeurs des fréquences propres de la cavité en utilisant le fait qu'entre deux nœuds de vibration il y a une distance de $\frac{\lambda_n}{2}$ avec $\lambda_n = \frac{c}{f_n}$.

Sur la longueur L, il y a n+1 nœuds , $L = n\frac{\lambda_n}{2} = \frac{nc}{2f_n}$ d'où $\boxed{f_n = \frac{nc}{2L}}$

n = 1 correspond au mode fondamental .



2- Energie d'un mode de vibration :