

**DS SCIENCES PHYSIQUES N°5**  
**Samedi 11 janvier**

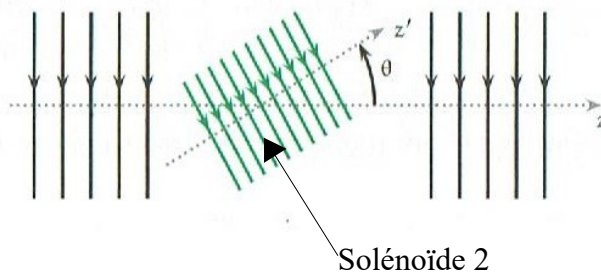
**Problème 1:** autour de l'induction électromagnétique .

**A- Bobines couplées :**

1- En négligeant les effets de bord, établir l'inductance propre  $L_1$  d'un solénoïde de section  $S_1$  et de longueur  $l_1$ , possédant  $N_1$  spires . Donner sa valeur numérique avec

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}, N_1 = 1000, l_1 = 0,1 \text{ m et } S_1 = 10^{-3} \text{ m}^2 .$$

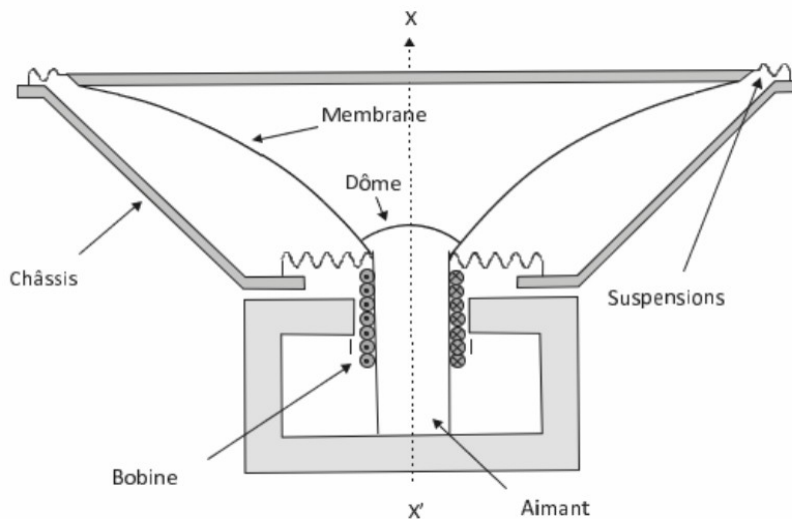
2- On considère un petit solénoïde possédant  $N_2$  spires, de section  $S_2$ , placé à l'intérieur du solénoïde précédent . L'angle entre les axes des deux solénoïdes est  $\theta$ . Déterminer l'inductance mutuelle  $M$  entre les deux solénoïdes .



3- Le solénoïde 2 étant court-circuité, on alimente le solénoïde à l'aide d'un générateur de tension variable Justifier qualitativement qu'un courant apparaît dans le solénoïde 2 . Donner le schéma électrique équivalent du système ainsi que les équations électriques du système . On notera  $u(t)$  la tension du générateur,  $R_1$  la résistance du solénoïde 1,  $R_2$  et  $L_2$  les résistance et inductance propre du solénoïde 2 .

**B-Étude d'un haut-parleur électrodynamique**

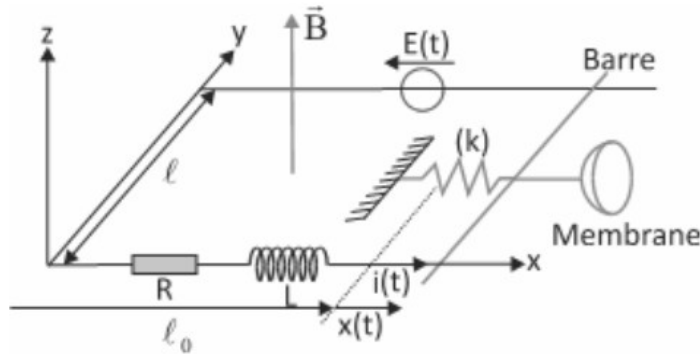
On représente ci-dessous un haut-parleur électrodynamique (figure 1). Celui-ci est constitué d'une bobine d'axe  $(X'X)$ , de résistance  $R$ , d'inductance propre  $L$ , solidaire d'une membrane pouvant se déplacer parallèlement à elle-même suivant la direction  $(X'X)$  normale à son plan. Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre d'un écart algébrique  $x(t)$ , elle est rappelée vers cette position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur  $k$ . De plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement fluide, proportionnelle à sa vitesse de déplacement, qui s'écrit  $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$  .



**Figure 1** - Schéma du haut-parleur de l'étude

La bobine est placée dans un champ magnétique radial  $\vec{B}$ , uniforme en norme, normal à (X'X), créé par un aimant permanent.

**On se place dans un modèle simplifié de haut-parleur basé sur la configuration des rails de Laplace, représentée sur la figure 2.** Le générateur de force électromotrice (f.é.m.)  $E(t)$  délivre un signal électrique que l'on veut transformer en signal sonore. La membrane et l'air sont mis en mouvement par l'intermédiaire de la barre de largeur  $l$  qui se déplace sans frottement de  $x(t)$ . Cette grandeur  $x(t)$  représente l'élongation du ressort par rapport à la position d'équilibre, elle-même caractérisée par la longueur  $l_0$ . La membrane du haut-parleur est solidaire de la barre. On note  $m_T$  la masse du système {barre, haut-parleur}. On suppose donc que la verticale est définie par l'axe  $z$ , l'axe  $x$  étant horizontal. On note  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  la base des vecteurs unitaires de la figure 2 et  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  le champ magnétique uniforme et constant. On note  $\vec{v} = v(t)\vec{e}_x$ .



**Figure 2 - Configuration des rails de Laplace de l'étude**

- 1- Déterminer l'expression de la fem induite.
- 2- Dédire de la question précédente l'équation électrique (E.E.) traduisant le comportement du circuit. Faire le schéma électrique équivalent en tenant compte de la f.é.m. induite. On notera  $i(t)$  le courant induit dans ce circuit.
- 3- Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'ensemble {barre + haut-parleur} de masse  $m_T$ . En déduire l'équation différentielle mécanique relative au mouvement de la barre (équation E.M.).
- 4- Comparer la puissance de la f.é.m. à la puissance de la force de Laplace. Que traduit cette relation ?
- 5- Faire un bilan de puissances. Le commenter.
- 6- Le générateur délivre une tension sinusoïdale  $E(t)$  de pulsation  $\omega$ . On utilisera les notations complexes, pour lesquelles  $\underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$ ,  $E(t)$  s'identifiant alors avec la partie réelle de  $\underline{E}(t)$ . Montrer que l'on a  $\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m)\underline{i}$  où  $\underline{i}$  est le courant complexe traversant le circuit et  $\underline{Z}_m$  est une grandeur, appelée impédance motionnelle, dont on donnera l'expression en fonction de  $B, l, \alpha, m_T, \omega$  et  $k$ .

- 7- Montrer que l'admittance motionnelle  $\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m}$  peut s'écrire sous la forme

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega}$$

Donner les expressions des termes  $R_m, C_m$  et  $L_m$  en fonction de  $B, l, \alpha, m_T$  et  $k$ .

- 8- Dédire de ce qui précède le schéma électrique équivalent du haut-parleur.

Le rendement  $\eta$  du haut-parleur est défini comme le rapport de la puissance moyenne émise par l'onde sonore sur la puissance moyenne fournie par la source de tension.

- 9- Montrer que la relation établie à la question 5 devient, en raisonnant sur les moyennes temporelles, en régime périodique établi :  $\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle$ . Commenter ce résultat.

- 10- En identifiant la puissance émise par l'onde sonore  $\langle P_{son} \rangle$  à  $\langle \alpha v^2 \rangle$ , où  $v$  est la vitesse de la

membrane, montrer que  $\eta$  est de la forme : 
$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} [1 + Q^2 (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2]}$$

On donnera les expressions de  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction de  $\alpha, m_T$  et  $k$ .

11- Commenter la forme obtenue, on pourra par exemple effectuer l'étude asymptotique du comportement en basses et hautes pulsations, ainsi que pour la pulsation  $\omega_0$ .

## **Problème 2 : Niveau 1 GSM 4G**

### **Données :**

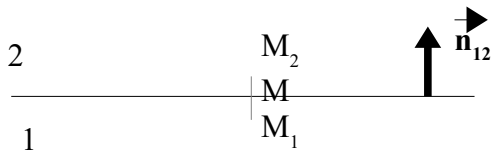
- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide ou l'air :  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

- permittivité diélectrique du vide ou de l'air :  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F.m}^{-1}$

- perméabilité magnétique du vide ou de l'air :  $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

- relations de passage du champ électromagnétique de part et d'autre d'une surface chargée



$$\vec{E}(M_2, t) - \vec{E}(M_1, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$
  $M_1$  et  $M_2$  étant deux points infiniment voisins de  $M$  respectivement situés dans les milieux 1 et 2 et  $\sigma(M)$  la densité surfacique de charge au point  $M$ .

**Les trois parties de ce problème sont indépendantes. Toutefois, la compréhension et la réalisation de la première partie permettent d'aborder plus rapidement les deux dernières parties.**

On s'intéresse à l'un des deux standards de télécommunication, candidat pour la 4<sup>e</sup> génération de la téléphonie mobile, « Long Term Evolution – Advanced ». Il est constitué, en France, de deux bandes de fréquences dites 800 MHz et 2 600 MHz. Par le déploiement de technologies particulières, des débits supérieurs à 30 Mbits / seconde pour des mobiles en mouvement sont visés.

L'espace est défini par un repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et on considère un point  $M$  de l'espace repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . On pose  $\vec{OM} = \vec{r}$

## **PARTIE I : PROPAGATION DANS L'AIR :**

### **A- Propagation :**

1- Donner, en les nommant, les équations de Maxwell sous leurs formes locales dans l'air en l'absence de sources. On traitera des champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  comme n'étant pas nécessairement ceux d'une Onde Plane Progressive Sinusoïdale (OPPS ou OPPH ou OPPM).

2- Etablir l'équation de propagation en champ électrique et en déduire l'expression de la vitesse de propagation de l'onde, en fonction des données de l'énoncé.

3- On travaille en notation complexe et on considère à présent que le champ  $\vec{E}(M, t)$  est celui d'une OPPS polarisée rectilignement parallèlement à  $\vec{e}_x$  se propageant suivant les  $z$  croissants, de pulsation  $\omega$  et d'amplitude complexe  $\frac{E_m}{\sqrt{2}}$ .

a- Donner le vecteur d'onde  $\vec{k}$  (on appellera  $k$  la norme de  $\vec{k}$ ), ainsi que l'expression complexe  $\vec{E}(M, t)$  du champ électrique associé à cette onde.

b- Etablir la relation liant  $k$ ,  $w$  et  $c$ .

4- Dans l'hypothèse de la question précédente, expliciter le champ magnétique complexe  $\underline{\vec{B}}(M, t)$  dans la base cartésienne en fonction de  $\underline{E}_m$ ,  $c, k$  et  $w$ .

5- En notant  $\underline{E}_m = E_m e^{-j\varphi}$ ,  $\varphi$  étant une constante, expliciter les champs réels  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$ .

### B- Puissance et rayonnement :

1- Donner la définition du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}(M, t)$  en fonction des champs et son interprétation physique. Quelle est sa dimension physique ?

2- Déterminer la valeur moyenne temporelle de la norme de  $\vec{\Pi}(M, t)$ .

3- Dans le cas d'une antenne réelle, l'hypothèse de l'OPPS n'est valable que localement. On sait alors que la valeur moyenne du vecteur de Poynting dépend de la distance  $d$  à l'antenne, de la puissance  $P_a$  d'alimentation et de son gain  $G$ , lequel dépend de la direction d'observation. On peut ainsi écrire :  $4\pi d^2 \langle \|\vec{\Pi}(d)\| \rangle = P_a G$ . Exprimer l'amplitude  $E_m$  du champ en fonction de  $c$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $P_a$ ,  $G$  et  $d$ .

### C- Exposition :

Il est parfois nécessaire de privilégier un sens de fonctionnement de l'antenne. L'énergie rayonnée par une antenne est alors répartie de manière inégale dans l'espace et il existe des directions privilégiées, appelées « lobes de rayonnement ». Ces différentes directions peuvent être visualisées à l'aide du diagramme de rayonnement réalisé en trois dimensions. Le lobe le plus important est appelé « lobe principal ». Il est dirigé vers l'avant de l'antenne. Les lobes secondaires, moins importants, sont dirigés vers l'arrière ou sur les côtés de l'antenne.

La norme sanitaire pour ce type de rayonnement est actuellement en France  $E_{max} = 61$  V/m. Elle correspond à un seuil défini sur la base des effets thermiques (échauffement) liés au champ électromagnétique. A titre de comparaison, la norme en Italie, Russie, Pologne et Chine est de  $E_1 = 6$  V/m.

1- Dans le cadre d'une implantation urbaine, il se peut que certains locaux interceptent le lobe principal. En considérant dans ce cas une puissance  $P_a = 50$  W, un gain  $G = 63$  et une distance  $d = 100$  m, calculer l'intensité du champ  $E_{m1}$ . Commenter le résultat.

2- Une autre possibilité d'être exposé au rayonnement d'une antenne relais concerne le lobe secondaire orienté vers le sol. Dans ce cas le gain est plus faible, mais la distance également. Calculer, pour la même puissance  $P_a = 50$  W, le champ  $E_{m2}$  dans le cas où  $G = 2$  et  $d = 10$  m. Commenter le résultat.

## PARTIE II : REFLEXION D'UNE OPPS PAR UN MUR DE BETON

De façon préliminaire, on considère une interface air - métal parfait dans le plan  $z = 0$ . L'air occupe l'espace des  $z < 0$  et le métal celui des  $z > 0$ . L'onde incidente est une OPPS se propageant dans l'air, polarisée selon  $\vec{e}_x$  et qui arrive normalement à l'interface. On note  $\underline{E}_{mi} = E_m$  avec  $E_m$  réel et  $\underline{E}_{mr}$  respectivement, les amplitudes complexes des champs incident et réfléchi. On note  $\vec{k}_i$  et  $\vec{k}_r$ , les vecteurs d'ondes associés respectifs. **On admet que l'onde réfléchie est plane, a la même polarisation et même pulsation que l'onde incidente.**

### A- Expressions des champs

1- Exprimer les champs électrique  $\underline{\vec{E}}_i(M, t)$  et magnétique  $\underline{\vec{B}}_i(M, t)$  incidents en fonction de  $\underline{E}_{mi}$ ,  $z$ ,  $t$ ,  $\omega$  et  $k = \|\vec{k}_i\|$

2- Donner le vecteur d'onde de l'onde réfléchie. Exprimer les champs électrique  $\underline{\vec{E}}_r(M, t)$  et magnétique  $\underline{\vec{B}}_r(M, t)$  incidents en fonction de  $\underline{E}_{mr}$ ,  $z$ ,  $t$ ,  $\omega$  et  $k$ .

- 3- Le métal étant parfait, que dire du champ électromagnétique à l'intérieur du métal ?
- 4- Ecrire la relation de passage pour les composantes tangentielles du champ électrique .
- 5- En déduire la valeur du coefficient de réflexion en champ électrique :  $r = \frac{E_{m_r}}{E_{m_i}}$  .

### B - Champ total

- 1- Déterminer l'expression du champ total réel  $E_{total}(M, t)$  .
- 2- Quel type d'onde est-ce ?
- 3- Représenter l'amplitude de  $E_{total}(M, t)$  en fonction de la position de  $M$  pour trois valeurs différentes de  $t$ .
- 4- Localiser et nommer les points remarquables de la représentation.
- 5- Déterminer la distance  $d_m$  entre un minimum et un maximum adjacents en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde.

### C- Cas du béton

On remplace à présent le métal parfait par du béton. On reprend l'ensemble du problème et des notations considérées dans les parties IIA1- et IIA2. On donne le nouveau coefficient de réflexion en champ électrique  $r = r \cdot e^{-j\alpha}$  dans la gamme de fréquence de la bande 2 600 MHz avec  $r = 0,386$  et  $\alpha = 169^\circ$ .

- 1- Mettre le champ total  $E_{total}(M, t)$  dans l'air sous la forme  $E_{total}(M, t) = [f(z)] \vec{E}_i(M, t)$  et exprimer  $f(z)$  en fonction de  $r$ ,  $\alpha$ ,  $z$  et  $k$ .
- 2- En constatant que  $\|E_{total}\| = |f(z)| \|\vec{E}_i\|$ , exprimer les valeurs maximale  $\|E_{total}\|_{max}$  et minimale  $\|E_{total}\|_{min}$  de l'amplitude de  $\|E_{total}\|$  en fonction de  $r$  et  $E_m$ .
- 3- Pour le coefficient de réflexion donné ci-dessus pour le béton, calculer le rapport  $\rho = \frac{\|E_{total}\|_{max}}{\|E_{total}\|_{min}}$  également appelé Rapport d'Onde Stationnaire ou ROS.
- 4- Donner la distance  $d_m$  entre un minimum et un maximum adjacents de  $\|E_{total}\|$  .

## PARTIE III : ETUDE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS UN METAL REEL .

Pour certaines applications on dirige une onde électromagnétique sur une face métallique. Si la quasi-totalité de l'onde est réfléchiée, une faible proportion pénètre dans le métal. On étudie dans cette partie certaines propriétés du champ électromagnétique dans un métal.

On considère un milieu métallique occupant le demi-espace  $z \geq 0$  . Le métal est supposé ohmique et on note  $\gamma = 7,6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$  sa conductivité électrique.

On étudie les propriétés d'une onde électromagnétique dont le champ électrique, dans le métal, s'écrit en notation complexe  $\vec{E}(M, t) = \underline{E}_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_x$  .

- 1-
  - a- Écrire la loi d'Ohm locale liant le vecteur densité de courant et le champ électrique .
  - b- Écrire la loi locale de conservation de la charge électrique.
  - c- En utilisant une des équations de Maxwell et les expressions précédentes montrer que la densité volumique de charge vérifie l'équation  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$  . Calculer numériquement  $\tau$  .

Sachant qu'on utilise des signaux dont la fréquence est inférieure à  $10^9 \text{ Hz}$  , que peut-on en conclure pour la densité volumique de charge dans un métal ?

- 2-
  - a- Montrer, dans les mêmes conditions que précédemment, que l'équation de Maxwell-Ampère dans un métal s'écrit localement  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  .
  - Établir l'équation de propagation du champ électrique dans le métal .
  - b- Établir la relation de dispersion dans le métal, en déduire  $\underline{k}$  ainsi que l'expression du champ

électrique dans le métal . On posera  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

Commenter ces expressions.

Pourquoi l'onde s'atténue-t-elle au cours de sa propagation ?

c- Quel nom donne-t-on à la grandeur  $\delta$  ? Pourquoi ?

Calculer  $\delta$  pour  $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50\text{Hz}; 50\text{kHz}; 50\text{MHz}$  .

Citer des applications utilisant les propriétés des ondes dans un métal .

## **Problème2 : Niveau 2: type centrale /Mines**

### **Propriétés optiques du métal or**

*Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent une prise d'initiative de la part du candidat. Elles sont signalées par une barre dans la marge gauche. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche de résolution, les hypothèses effectuées et d'illustrer le raisonnement, le cas échéant, par des schémas. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.*

*De façon plus générale, le candidat est amené à expliciter toutes les hypothèses et initiatives qu'il est amené à*

*prendre, y compris en dehors de ces questions*

On souhaite modéliser les propriétés optiques de l'or à l'état métallique à l'aide du modèle de Drude. Pour ce faire, on considère que le métal est composé d'un ensemble d'ions supposés fixes, qui constituent le réseau cristallin, et d'un gaz d'électrons libres de se déplacer sur des distances très largement supérieures aux distances interatomiques. Chaque électron porte la charge  $-e$  et possède une masse notée  $m_e$ .

En l'absence d'excitation électromagnétique extérieure, l'état du métal est stationnaire et qualifié d'état de repos. Il est désigné par les grandeurs physiques suivantes, indicées par 0, indépendantes du temps.

Les champs électrique et magnétique au repos, en un point  $M$  sont identiquement nuls :  $\vec{E}_0(M) = \vec{0}$  et

$\vec{B}_0(M) = \vec{0}$  . Les électrons sont animés d'un mouvement d'agitation thermique, mais la vitesse

moyenne des électrons qui se situent au voisinage d'un point  $M$  est nulle :  $\vec{v}_0(M) = \vec{0}$  . Au repos, le métal est électriquement neutre à l'échelle locale : le nombre moyen d'électrons par unité de volume est égal au nombre moyen d'ions par unité de volume.

On note  $n_{e0}$  le nombre moyen d'électrons par unité de volume dans l'état de repos du métal, supposé uniforme.

La propagation d'une onde électromagnétique vient perturber localement l'état de repos du métal. On suppose que cette perturbation est d'amplitude suffisamment faible pour que les différentes grandeurs physiques puissent s'écrire comme la somme de la valeur de cette grandeur au repos, indicée par 0 et d'une valeur perturbée, indicée par le chiffre 1. Ainsi, le champ électrique, le champ magnétique, le champ de vitesse des électrons et le nombre moyen d'électrons libres par unité de volume s'écrivent respectivement comme suit :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0(M) + \vec{E}_1(M, t) = \vec{0} + \vec{E}_1(M, t)$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_0(M) + \vec{B}_1(M, t) = \vec{0} + \vec{B}_1(M, t)$$

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_0(M) + \vec{v}_1(M, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M, t)$$

$$n_e(M, t) = n_{e0} + n_{e1}(M, t)$$

Les grandeurs  $\vec{E}_1(M, t)$ ,  $\vec{B}_1(M, t)$ ,  $\vec{v}_1(M, t)$  et  $n_{e1}(M, t)$  sont associées à la propagation de l'onde électromagnétique dans le milieu. Leurs amplitudes respectives sont supposées suffisamment faibles pour qu'on se limite à un traitement linéaire : tous les calculs se limiteront à des termes qui s'expriment au premier ordre vis-à-vis des amplitudes indicées par le chiffre 1. Ci-dessous est présenté un exemple de linéarisation au premier ordre du produit de deux grandeurs où le terme du second ordre est finalement négligé :

$$\begin{aligned}
a(M, t)b(M, t) &= (a_0 + a_1(M, t))(b_0 + b_1(M, t)) \\
&= \underbrace{a_0 b_0}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{a_0 b_1(M, t) + b_0 a_1(M, t)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{a_1(M, t)b_1(M, t)}_{\text{ordre 2 négligeable}} \\
&\simeq a_0 b_0 + a_0 b_1(M, t) + b_0 a_1(M, t).
\end{aligned}$$

## I – Mouvement des électrons libres

On s'intéresse dans un premier temps au mouvement des électrons libres. Le gaz d'électrons libres est assimilé à un fluide. On note respectivement  $m_e$  et  $-e$  la masse et la charge électrique d'un électron. On suppose qu'en plus de la force d'interaction avec le champ électromagnétique de l'onde, les électrons sont

soumis à une force dissipative qui modélise leurs interactions avec le réseau cristallin :  $-\frac{m_e}{\tau} \vec{v}_1(M, t)$ .

Le mouvement des électrons est supposé non relativiste ( $\|\vec{v}_1\| \ll c$  où  $c$  est la célérité de la lumière dans le vide). Dans l'approximation linéaire, l'équation du mouvement des électrons se met sous la forme

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(M, t) = -e \vec{E}_1(M, t) - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}_1(M, t) \quad (I)$$

- 1- Expliquer pourquoi, compte tenu des hypothèses retenues, la composante magnétique de la force exercée par l'onde électromagnétique sur les électrons n'apparaît pas dans l'équation du mouvement (I)
- 2- Exprimer, dans l'approximation linéaire, la densité volumique de courant électrique  $\vec{j}_1(M, t)$  dans le métal en fonction, entre autres, de la vitesse moyenne des électrons  $\vec{v}_1(M, t)$  puis établir l'équation différentielle liant  $\vec{j}_1(M, t)$  et  $\vec{E}_1(M, t)$ .

## II- Relation de dispersion

On suppose que le métal est soumis à une onde électromagnétique, harmonique de pulsation  $\omega$ , dont le champ électrique s'écrit ainsi en notation complexe :  $\vec{E}_1(M, t) = \vec{E}_1 \exp(i(\omega t - \underline{n} \frac{\omega}{c} x)) \vec{e}_y$  (II)

où  $\underline{n} \in \mathbb{C}$  est appelé *indice complexe* du métal. L'espace est rapporté à la base orthonormée cartésienne  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

3- Justifier que l'onde électromagnétique considérée peut être qualifiée de plane, progressive, transverse et que son état de polarisation est rectiligne.

4- Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans le milieu considéré, en faisant intervenir  $n_{el}(M, t)$ ,  $\vec{j}_1(M, t)$ ,  $\vec{E}_1(M, t)$  et  $\vec{B}_1(M, t)$ .

5- Montrer que les caractéristiques de l'onde électromagnétique imposent  $n_{el}(M, t) = 0$

6- Établir l'équation aux dérivées partielles qui régit l'évolution spatiale et temporelle du champ électrique  $\vec{E}_1(M, t)$  dans le métal. On fera apparaître la pulsation plasma définie par la relation

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_{e0} e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

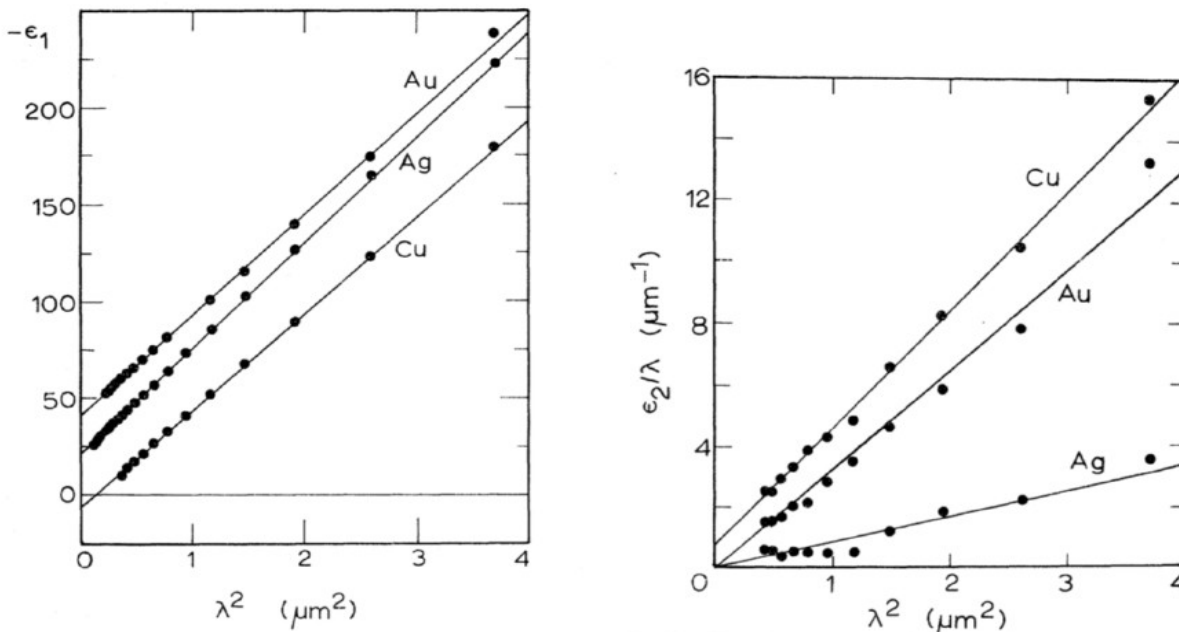
7- Établir que le champ électrique (II) est solution de l'équation aux dérivées partielles précédente à condition que :  $\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$

8- Déterminer les expressions des constantes diélectriques  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  (qui sont des grandeurs réelles) telles que  $\underline{n}^2 = \epsilon_1 - i \epsilon_2$ . Exprimer  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_p$  et  $\tau$ .

9- En déduire les expressions asymptotiques des constantes diélectriques  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  dans la limite où  $\omega \tau \gg 1$  et comparer  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  dans cette limite.

La figure 1 représente un ensemble de données expérimentales relatives aux constantes diélectriques de différents métaux. L'or correspond au symbole Au. Sur la figure de gauche est représentée l'allure de

$-\epsilon_1$  en fonction de la longueur d'onde ( $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ ) au carré, et sur la figure de droite,  $\frac{\epsilon_2}{\lambda}$  en fonction de la longueur d'onde au carré  $\lambda^2$ , dans une certaine gamme de longueurs d'onde.



(a) Tracé de  $-\epsilon_1$  en fonction de  $\lambda^2$

(b) Tracé de  $\epsilon_2/\lambda$  en fonction de  $\lambda^2$ .

**Figure 3** Évolution des constantes diélectriques de différents métaux en fonction de la longueur d'onde<sup>3</sup>; par souci de lisibilité, l'ordonnée à l'origine des droites représentant  $-\epsilon_1$  en fonction de  $\lambda^2$  pour l'or (Au) et l'argent (Ag) est arbitraire

10- Exploiter la figure 1 et les résultats théoriques précédents pour déterminer des valeurs numériques approchées du nombre moyen d'électrons libres  $n_{e0}$  dans le métal or et de la constante de temps  $\tau$ . Comparer la valeur de  $n_{e0}$  obtenue à celle qu'on peut déduire des données relatives à l'or qui figurent en fin d'énoncé.

11- L'indice complexe du milieu est noté  $\underline{n} = n_1(\omega) - i n_2(\omega)$  avec  $n_1(\omega)$  et  $n_2(\omega)$  réels strictement positifs fonctions de  $\omega$ .

a- Ecrire le champ  $\vec{E}_1(M, t)$ , commenter. Déterminer la vitesse de phase de l'onde ainsi que la distance caractéristique d'atténuation de l'onde dans le milieu.

b- On considère le cas où  $n_2(\omega) \rightarrow \infty$  quelque soit  $\omega$ , que peut-on dire du champ dans le métal. On se place dans ce cas par la suite.

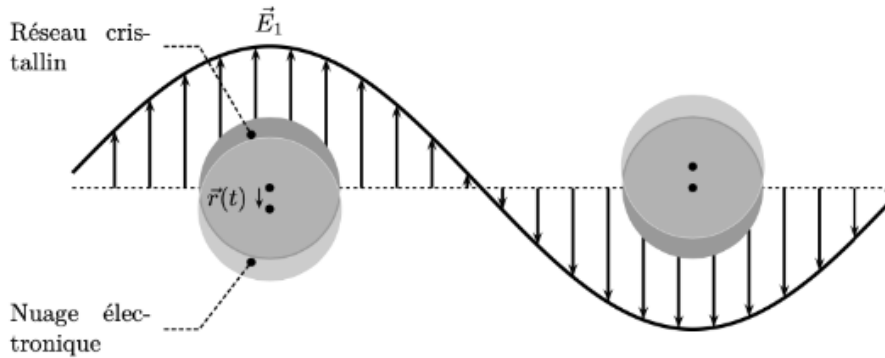
c- On envoie une onde plane progressive monochromatique, de pulsation  $\omega$ , en incidence normale sur une feuille d'or. On translate en amont de la feuille d'or, une antenne munie d'un dispositif de mesure susceptible de mesurer l'intensité d'un champ électrique. La mesure indique zéro pour des positions régulièrement espacées de l'antenne.

Justifier le résultat obtenu à l'aide d'une étude quantitative dans laquelle vous établirez l'expression du champ électrique total. Quelles sont les positions sur lesquelles la mesure indique un 0.

### III- Résonance plasmon des nanoparticules d'or

Lorsqu'une particule métallique est soumise à un champ électromagnétique dont la longueur d'onde  $\lambda$  est beaucoup plus grande que la taille des particules, tous les électrons libres subissent le même champ et oscillent collectivement et en phase. En effet, lorsque le nuage d'électrons est déplacé par rapport aux noyaux métalliques par interaction avec le champ électrique, il se crée une force de rappel due à l'attraction coulombienne entre noyaux et électrons (figure 4). Lorsque la fréquence de l'onde incidente correspond à la fréquence propre de ces oscillations, il se produit un phénomène de résonance, appelé résonance de plasmon de surface.





**Figure 4** Représentation schématique des oscillations de plasmon pour une nanoparticule sphérique, montrant le déplacement des électrons libres par rapport au réseau cristallin des noyaux métalliques

La fréquence de résonance plasmon dépend de la nature du métal. Elle a lieu dans le domaine du visible, seulement pour l'or, le cuivre et l'argent, d'où la coloration particulière de ces nanoparticules. Si la particule est sphérique et beaucoup plus petite que la longueur d'onde (rayon < quelques dizaines de nanomètres) alors la position de la résonance plasmon est indépendante de la taille de la particule [...]. Elle dépend alors des propriétés du métal et du milieu environnant. Ainsi, des nanoparticules d'or de 20 nm ont une bande de résonance plasmon vers 520-530 nm (absorption dans le vert) et sont rouges. L'or sous forme de nanoparticules perd donc sa couleur dorée si caractéristique.

Pour interpréter le rappel du nuage des électrons libres et en déduire une expression de la pulsation propre  $\Omega$  de son mouvement d'oscillation, il faut s'intéresser à la séparation des charges électriques qui résulte du déplacement de ce nuage électronique. La figure 4 suggère qu'on peut modéliser cette distribution de charges électriques par la superposition de deux boules, de même rayon  $R$  qu'on peut considérer uniformément chargées en volume, l'une correspondant au nuage des électrons libres, l'autre au réseau cristallin des noyaux métalliques, et dont le décalage est donné par le vecteur  $\vec{r}(t)$ . Ce déplacement reste bien inférieur au rayon  $R$  de la nanoparticule.

### Modélisation de la réponse d'une nanoparticule à une excitation électromagnétique

On considère une nanoparticule d'or sphérique, de rayon  $R$ , placée dans le vide. En première approche, on assimile son nuage électronique à un oscillateur harmonique, de masse égale à  $\frac{4}{3}\pi R^3 n_{e0} m_e$ , et de

pulsation propre  $\Omega = \frac{\omega_P}{\sqrt{3}}$  excité par le champ électrique d'une onde électromagnétique incidente. On

note  $\vec{E}_1(0, t)$  champ électrique de cette onde au centre  $O$  de la nanoparticule, à l'instant  $t$ . On admet que ce centre se confond avec le centre du réseau cristallin, considéré comme fixe dans le référentiel d'étude. On suppose également que le champ électrique est uniforme à l'échelle de la nanoparticule.

12- Justifier que l'équation différentielle vérifiée par le vecteur déplacement  $\vec{r}(t)$  du nuage électronique par rapport au centre  $O$  de la nanoparticule s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} + \Omega^2 \vec{r}(t) = \frac{-e}{m_e} \vec{E}_1(0, t)$$

On se place désormais en régime sinusoïdal forcé où  $\vec{E}_1(0, t) = E_1 \cos(\omega t - \phi)$  où  $\phi$  est une constante.

13- Déterminer l'expression de la représentation complexe du déplacement  $\vec{r}$  en régime sinusoïdal forcé en fonction, entre autres, de  $\underline{\vec{E}}_1$ , représentation complexe du champ électrique de l'onde incidente.

14- En déduire l'expression du moment dipolaire électrique  $\vec{p}$  de la nanoparticule en fonction de  $\vec{E}_1$  sous la forme  $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha(\omega) \vec{E}_1$ .

15- Expliciter la polarisabilité complexe  $\alpha(\omega)$  en fonction de  $\omega, \Omega, \omega_p$  et  $R$ . Préciser la dimension du module  $|\alpha(\omega)|$  de la polarisabilité complexe.

La polarisabilité complexe de la nanoparticule traduit sa réponse à une excitation électromagnétique sinusoïdale extérieure.

16- Étudier et interpréter qualitativement le comportement de  $|\alpha(\omega)|$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . Indiquer quelle modification principale entraîne la prise en compte d'effets dissipatifs dans le mouvement du nuage électronique.

Un modèle plus précis, tenant à la fois compte du caractère dissipatif du mouvement du nuage électronique et de l'indice optique  $n_0$  du milieu transparent dans lequel se trouve la nanoparticule d'or,

conduit à l'expression suivante de la polarisabilité complexe :  $\alpha(\omega) = 4\pi R^3 \frac{\underline{n}^2 - n_0^2}{\underline{n}^2 - 2n_0^2}$  où  $\underline{n}^2$  est

l'indice complexe de l'or au carré, donné par la relation de la question 7. On montre aussi que la puissance électromagnétique absorbée par une nanoparticule d'or est proportionnelle à la valeur absolue de la partie imaginaire de sa polarisabilité complexe  $|\alpha(\omega)|$ .

17- Vérifier que la relation  $\alpha(\omega) = 4\pi R^3 \frac{\underline{n}^2 - n_0^2}{\underline{n}^2 - 2n_0^2}$  est compatible avec l'expression, déterminée à la question 14, de la polarisabilité complexe d'une nanoparticule placée dans le vide lorsqu'on néglige les phénomènes dissipatifs ( $\omega\tau \gg 1$ ).

### Données :

#### *Constantes physiques*

Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

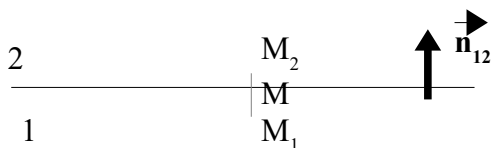
#### *Données relatives à l'or*

Symbole de l'élément chimique or	Au
Type de réseau cristallin	cubique à faces centrées
Rayon atomique	135 pm
Configuration électronique à l'état fondamental	[Xe] 6s <sup>1</sup> 4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup>

#### *Formulaire*

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

relations de passage du champ électromagnétique de part et d'autre d'une surface chargée



$\vec{E}(M_2, t) - \vec{E}(M_1, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$   $M_1$  et  $M_2$  étant deux points infiniment voisins de  $M$  respectivement situés dans les milieux 1 et 2 et  $\sigma(M)$  la densité surfacique de charge au point  $M$ .