

Asservissements

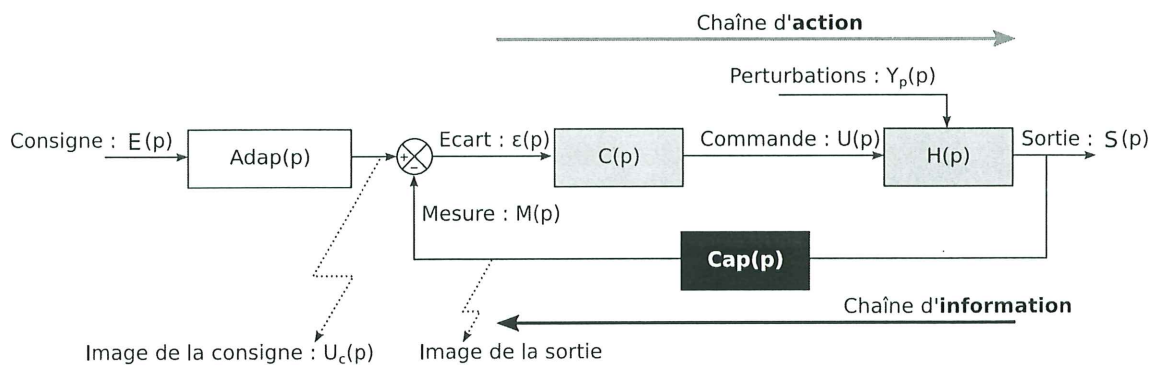
Stabilité

PSI - MP : Lycée Rabelais

1 Rappel du fonctionnement d'un système asservi

Un système est dit asservi lorsque la commande du processus est élaborée à partir de la différence entre l'image de la consigne et celle de la sortie. Les principaux éléments que l'on retrouve sur un système asservi sont les suivants :

- Un processus que l'on cherche à commandé. Ce processus est essentiellement constitué d'actionneurs (vérins, moteurs, servovannes, etc...). Ce processus peut être soumis à des perturbations.
- Un adaptateur qui permet de prendre en compte la consigne imposée par l'utilisateur. Le choix de cet adaptateur joue un rôle essentiel, nous le verrons dans la suite.
- Un capteur qui permet de mesurer la grandeur de sortie. On appellera m cette mesure qui est une image de la sortie.
- Un sommateur (ou comparateur) qui permet de calculer la différence entre l'image de la consigne et la mesure. Cette différence sera appelée écart et on la notera ε .
- Un correcteur qui permet d'élaborer un signal de commande à partir de l'écart ε .



1.1 Choix du bloc d'adaptation

Pour qu'un système asservi fonctionne correctement, il faut que l'écart $\varepsilon(p)$ soit une bonne image (proportionnelle) de la différence entre l'entrée et la sortie. Il faut donc que l'écart puisse s'écrire :

$$\varepsilon(p) = k \cdot (E(p) - S(p)) \text{ avec } k \text{ une constante}$$

Cela implique donc nécessairement que :

$$\varepsilon(p) = 0 \text{ si } E(p) = S(p)$$

Si le bloc d'adaptation et le bloc de mesure sont des constantes, on a donc : $Cap(p) = K_{cap}$ et $Adap(p) = K_{adap}$. On a :

$$\begin{aligned}\varepsilon(p) &= U_c(p) - M(p) \\ &= K_{adap} \cdot E(p) - K_{cap} \cdot S(p) \\ &= (K_{adap} - K_{cap}) \cdot E(p) \text{ si } E(p) = S(p)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\varepsilon(p) = 0 \text{ si } E(p) = S(p) \Leftrightarrow K_{adap} = K_{cap}$$

Ce résultat n'est pas à apprendre par cœur, mais il faut être capable de le retrouver, par la même méthode, en fonction de la forme du schéma-blocs proposé.

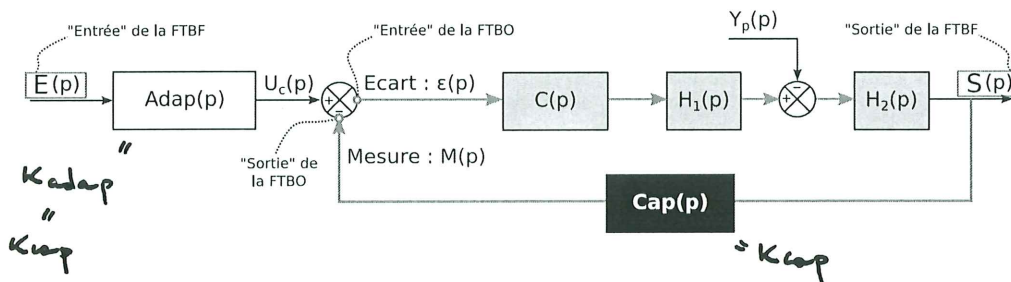
1.2 Notion de fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée.

On définira la fonction de transfert en boucle **ouverte** (FTBO) comme étant la fonction de transfert permettant d'obtenir la mesure en sortie et l'écart en entrée (voir schéma ci-dessous). On notera donc :

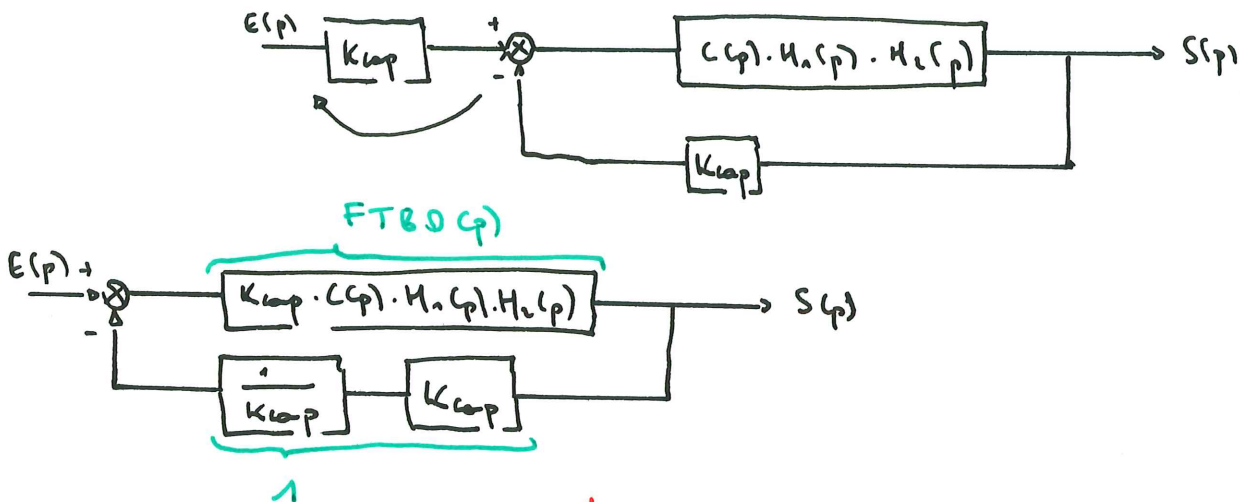
$$FTBO(p) = \left. \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} \right|_{Y(p)=0}$$

On définira la fonction de transfert en boucle **fermée** (FTBF) comme étant la fonction de transfert reliant l'entrée consigne du système à la sortie de celui-ci. On a donc :

$$FTBF(p) = \left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{Y(p)=0}$$



Supposons, comme montré précédemment, que : $Adap(p) = K_{adap} = Cap(p) = K_{cap}$. Sans perturbation, on a donc :



On a donc :

$$\left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{Y(p)=0} = FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

2 Définition de stabilité

À retenir

Un système sera dit stable au sens "Entrée Bornée - Sortie Bornée" si pour une entrée bornée, la sortie est également bornée.

3 Notion de pôles

3.1 Définition

La fonction de transfert bouclée du système FTBF(p) pourra toujours s'écrire sous la forme :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n}{1 + b_1 \cdot p + \dots + b_d \cdot p^d}$$

Les polynômes N et D pourront également s'écrire sous forme factorisée. On définit :

- Les racines du **numérateur** (notées p_i^n) que l'on appellera les **zéros** de la fonction de transfert ;
- Les racines du **dénominateur** (notées p_i^d) que l'on appellera les **pôles** de la fonction de transfert.

Remarque : Les p_i^n et les p_i^d appartiennent à l'ensemble des complexes.

Cela permet donc d'écrire FTBF(p) de la manière suivante :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{\left[1 - \frac{p}{p_1^n}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^n}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^n}\right] \dots}{\left[1 - \frac{p}{p_1^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^d}\right] \dots}$$

3.2 Lien entre pôles et stabilité

Soumettons ce système à une entrée en échelon $E(p) = \frac{E_0}{p}$. On peut donc écrire :

$$S(p) = \text{FTBF}(p) \cdot E(p) = \text{FTBF}(p) \cdot \frac{E_0}{p}$$

Pour obtenir la réponse à cet échelon dans le domaine temporel, il est nécessaire de décomposer $S(p)$ en éléments simples. $S(p)$ deviendra donc la somme de termes associés à chacun des pôles. On note $S_i(p)$, la contribution associée au pôle p_i . Le comportement du système résultera donc de la somme de la contribution de chacun des termes. Concernant la stabilité, il suffira donc qu'un des termes entraîne une instabilité pour que le système tout entier devienne instable.

Les pôles p_i^d peuvent être réels ou imaginaires. Étudions la contribution de chacun de ces termes. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{E_0}{p} \frac{K}{p^\alpha} \frac{\left[1 - \frac{p}{p_1^n}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^n}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^n}\right] \dots}{\left[1 - \frac{p}{p_1^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^d}\right] \dots} \\ &= \frac{K \cdot E_0}{p^{\alpha+1}} + \frac{B_1}{1 - \frac{p}{p_1^d}} + \frac{B_2}{1 - \frac{p}{p_2^d}} + \frac{B_3}{1 - \frac{p}{p_3^d}} + \dots \\ &= \frac{K \cdot E_0}{p^{\alpha+1}} + \sum S_{\text{pôle réel}}(p) + \sum S_{\text{pôle complexe}}(p) \end{aligned}$$

• Le terme $\frac{K.E_0}{p^{\alpha+1}}$ est la contribution qui permet que la sortie tende, en régime permanent, vers le produit *Gain statique* \times *Amplitude échelon d'entrée* lorsqu'il n'y a pas d'intégrateur ($\alpha = 0$). S'il y a des intégrateurs dans la FTBF donc si $\alpha \geq 1$, la sortie divergera.

• **PÔLE RÉEL.** On note p_r un pôle réel de la FTBF. La décomposition en éléments simples pour un pôle réel mènera donc à un terme de la forme suivante :


$$S_{\text{pôle réel}}(p) = \frac{B}{1 - \frac{p}{p_r}} = -\frac{B \cdot p_r}{p - p_r} \rightsquigarrow \mathcal{L}^{-1} \rightsquigarrow s_{\text{pôle réel}}(t) = -B \cdot p_r \cdot e^{p_r \cdot t}$$

Cette contribution divergera si : $p_r > 0$

• **PÔLE COMPLEXE.** On note p_c un pôle complexe de la FTBF. Si p_c est un pôle complexe alors $\overline{p_c}$ (conjugué de p_c) sera également un pôle de la FTBF. On pourrait également montrer que les contributions apportées par le complexe et son conjugué sont pondérées du même coefficient. Notons $p_c = a + j \cdot b$ et $\overline{p_c} = a - j \cdot b$. On va donc retrouver deux contributions de la forme :

$$\begin{aligned} S_{\text{pôle complexe}}(p) &= \frac{C}{p - p_c} + \frac{C}{p - \overline{p_c}} = \frac{C}{p - a - j \cdot b} + \frac{C}{p - a + j \cdot b} \\ &= \frac{C \cdot p - a \cdot C + C \cdot j \cdot b + C \cdot p - a \cdot C - C \cdot j \cdot b}{(p - a)^2 + b^2} \\ &= 2 \cdot C \cdot \frac{p - a}{(p - a)^2 + b^2} \rightsquigarrow \mathcal{L}^{-1} \rightsquigarrow s_{\text{pôle complexe}}(t) = 2 \cdot C \cdot \cos(b \cdot t) \cdot e^{a \cdot t} \end{aligned}$$

Cette contribution diverge si : $Re(p_c) = Re(\overline{p_c}) = a > 0$

 **À retenir :**
Un système sera stable si les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée sont à partie réelle strictement négative.

Position des pôles dans le plan complexe

Les pôles sont donc directement impliqués dans la décomposition en éléments simples et donnent une bonne idée de l'allure de la réponse temporelle. La réponse temporelle sera donc la somme des termes issus de la décomposition en éléments simples. On donne sur le schéma ci-dessous l'allure des réponses obtenues pour une entrée en échelon et pour différents pôles apparaissant dans la FTBF.

Pour une FTBF sans intégrateur et en réponse à un échelon d'amplitude E_0 , dans le domaine de Laplace, on aura donc :

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0}{p} + \sum S_{\text{pôle réel}}(p) + \sum S_{\text{pôle complexe}}(p)$$

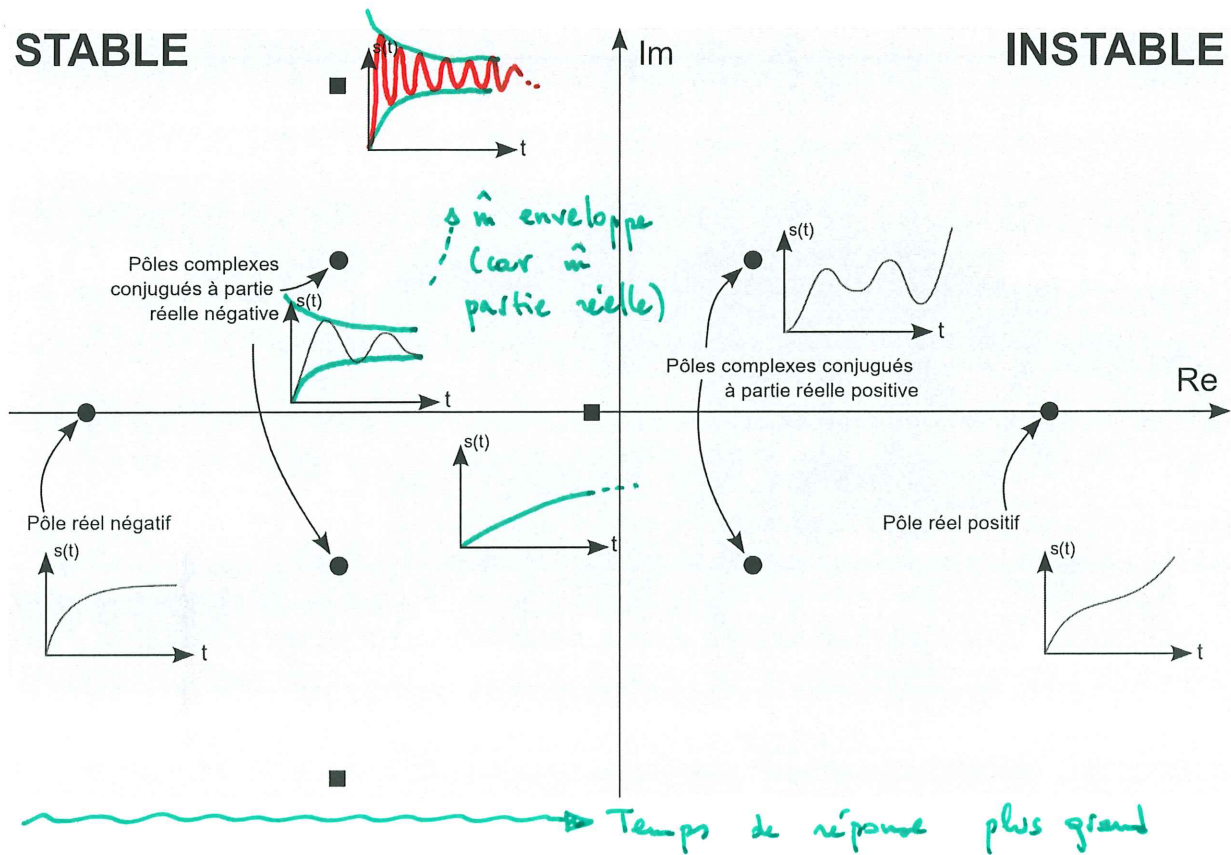
Dans le domaine temporel, on obtiendra donc :

si $s(0) = 0$

- Avec un pôle réel : $s(t) = K \cdot E_0 - B \cdot p_r \cdot e^{p_r \cdot t} = K \cdot E_0 \cdot (1 - e^{p_r \cdot t})$
- Avec deux pôles complexes conjugués : $s(t) = K \cdot E_0 \cdot (1 - \cos(b \cdot t) \cdot e^{a \cdot t})$

STABLE

INSTABLE



Mise en application et notion de pôles dominants

Considérons la fonction de transfert en boucle fermée suivante :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + 2 \times p + 0,1 \times p^2}$$

Question. Déterminer les paramètres K , ξ et ω_0 tels que :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

J'identifie : $K = 1$; $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$ et $\xi = 3$

Question. Donner la condition de stabilité. \rightarrow stable si $\text{Re}(\text{pôles}) < 0$.

$$\rightarrow \text{je calcule : } \Delta = \frac{4 \cdot \xi^2}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2} \cdot (\xi^2 - 1)$$

Le système à être instable lorsque $\xi < 1$ et donc $\Delta < 0$.

Je pose n tq $\Delta = (i \cdot n)^2$ et donc les deux pôles sont :

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \pm i \cdot \sqrt{n}}{\frac{2}{\omega_0^2}}$$

On a $\text{Re}(p_{1,2}) = -\xi \cdot \omega_0$.

Le système est stable si $\xi \cdot \omega_0 > 0$.

Pour une f° de transfert d'ordre 2, celle-ci est stable si tous les coefficients du dénominateur sont de même signe.

Question. Déterminer T_1 et T_2 (avec $T_2 > T_1$) tels que :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + T_1 \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + T_2 \cdot p}$$

On a ici $p_1 \approx -19,5 \text{ rad/s}$ et $p_2 \approx -0,5 \text{ rad/s}$.

$$\begin{aligned} \text{On a donc } FTBF(p) &= \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{p_2}\right)} \\ &= \frac{1}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)} \end{aligned}$$

$$\text{avec } T_1 = -\frac{1}{p_1} \approx 0,05 \text{ s}$$

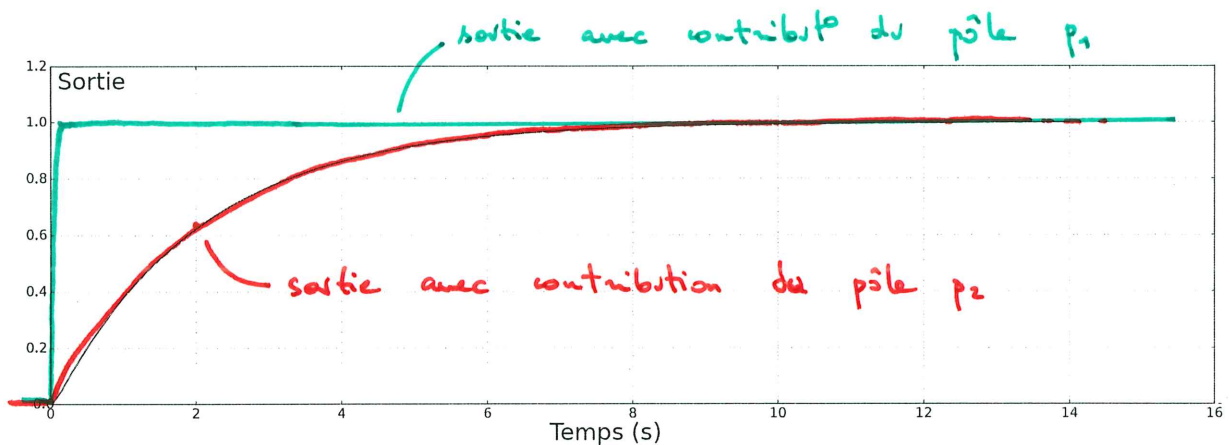
$$T_2 = -\frac{1}{p_2} \approx 2 \text{ s}$$

Notons $H_1(p) = \frac{1}{1 + T_1 \cdot p}$ et $H_2(p) = \frac{1}{1 + T_2 \cdot p}$. On admet alors que la sortie s'écrira :

$$s(t) = K \times E_0 + s_1(t) + s_2(t)$$

où $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont respectivement les contributions associées aux pôles p_1 et p_2 .

Analyse temporelle. Une simulation a permis de déterminer la réponse $s(t)$ à un échelon unitaire pour la fonction de transfert $FTBF(p)$.



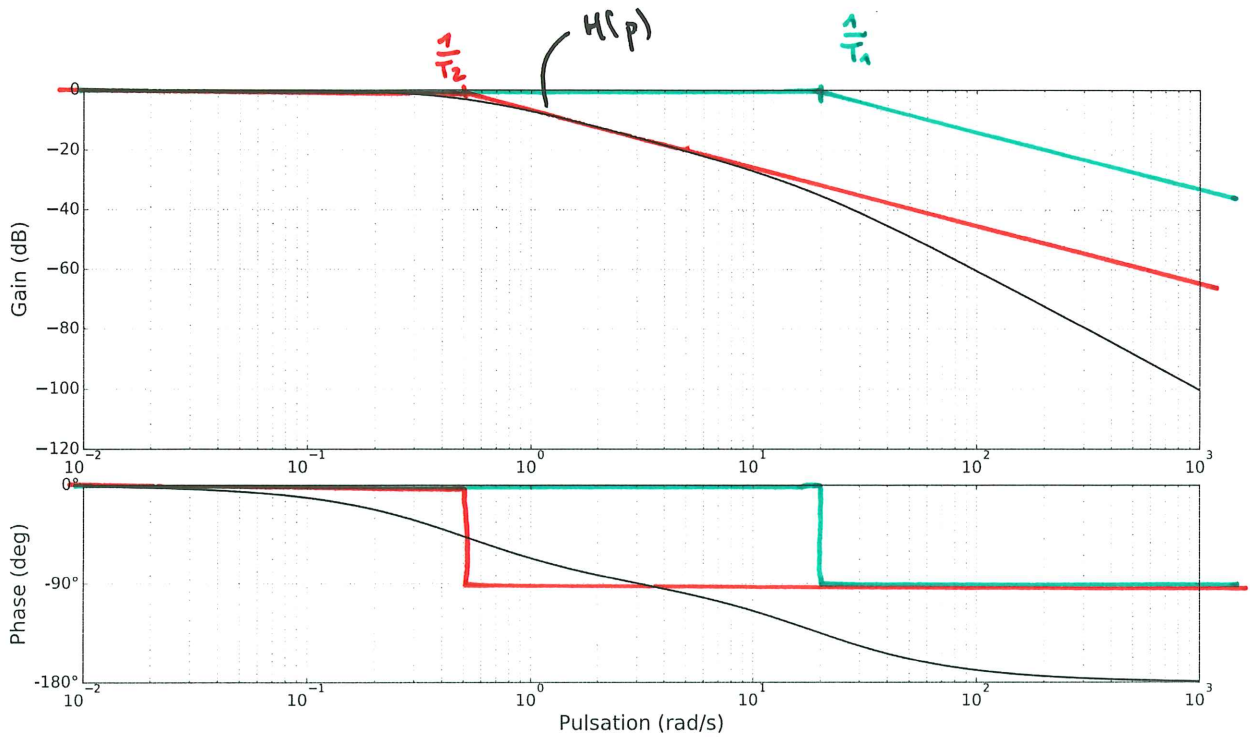
Question. Sur le graphique ci-dessus, tracer les réponses temporelles à un échelon unitaire en considérant que :

- $s(t) = K \times E_0 + s_1(t)$;
- $s(t) = K \times E_0 + s_2(t)$.

On constate que la réponse temporelle à une entrée en échelon pour la fonction de transfert $FTBF(p)$ est très proche de celle de obtenue par la fonction de transfert $H_2(p)$. $H_2(p)$ pourra donc réaliser une bonne approximation de $FTBF(p)$.

D'un point de vue très pragmatique, on dira que le sous-système qui est le plus lent "impose son rythme".

Analyse fréquentielle. Il est possible de réaliser un travail similaire mais dans le cadre d'une sollicitation harmonique. Une simulation a permis, ici aussi, de tracer le diagramme de Bode de la fonction $FTBF(p)$.



Question. Tracer les diagrammes de Bode pour les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$.

Question. Donner une approximation de FTBF(p).

On constate que pour $\omega \ll \dots \frac{1}{T_1} \dots$, le diagramme de Bode de FTBF(p) est très proche de celui de $H_2(p)$. $H_2(p)$ pourra donc réaliser une bonne approximation de FTBF(p).

On écrit donc que :

$$FTBF(p) \approx \frac{1}{1 + T_2 \cdot p} \quad \text{car } T_2 \gg T_1.$$

À retenir :

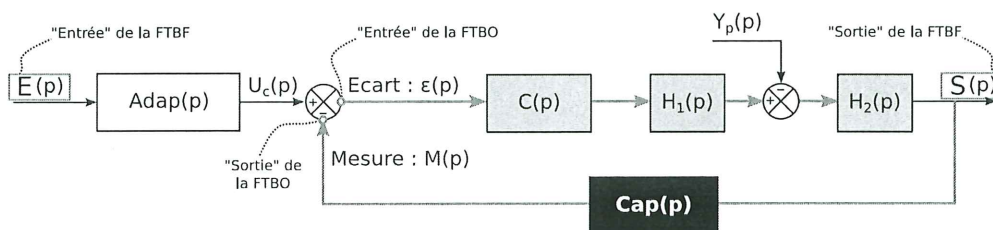
Si $|Re(p_2)| \ll |Re(p_1)|$ alors on dira que p_2 est un pôle dominant par rapport à p_1 .

—

Pour des pôles réels p_2 et p_1 associés aux constantes de temps $T_2 = -\frac{1}{p_2}$ et $T_1 = -\frac{1}{p_1}$, on dira que p_2 est un pôle dominant par rapport à p_1 si $T_2 \gg T_1$.

4 Marges de stabilité d'un système

On considère à nouveau le système représenté par le schéma bloc suivant :



On a montré que :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Et que :

Le système sera stable si et seulement si les parties réelles des pôles de la FTBF sont strictement négatives.

Ce qui équivaut donc à :

Le système sera stable si et seulement si les racines de l'équation caractéristique $1 + FTBO(p) = 0$ ont une partie réelle strictement négative.

4.1 Limite de cette approche de la stabilité

L'application stricte de cette condition de stabilité est généralement insuffisante pour l'ingénieur. On introduira alors la notion de marges de stabilité qui permettent de **caractériser à quel point un système est ou n'est pas stable**.

4.2 Critères graphiques

4.2.1 Idée de départ

On appellera alors, *point critique*, le point qui vérifie :

$$\begin{aligned}
 1 + FTBO(j\omega) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(FTBO(j\omega)) = -1 \\ \operatorname{Im}(FTBO(j\omega)) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |FTBO(j\omega)| = 1 \\ \operatorname{arg}(FTBO(j\omega)) = -180^\circ \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} G_{dB(\omega)} = 0\text{dB} \\ \phi(\omega) = -180^\circ \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le principe du critère graphique sur les diagrammes de Bode est le suivant :

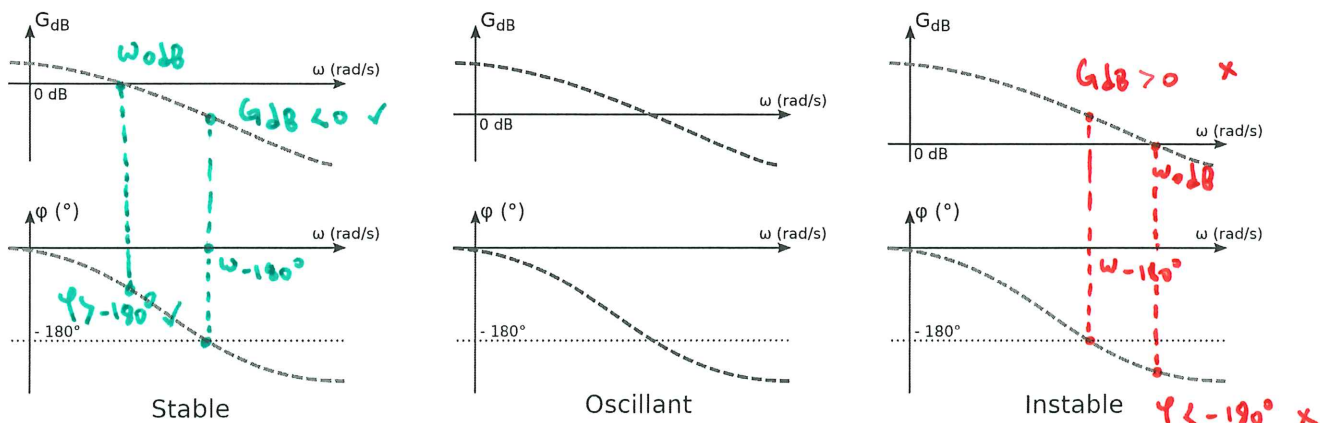
- **1** - Tracer la fonction de transfert en boucle ouverte sur un diagramme de Bode.
- **2** - Observer la position des courbes par rapport au point critique ($G_{dB(\omega)} = 0\text{dB}$ et $\phi(\omega) = -180^\circ$).

Ce critère graphique n'est valable que si la FTBO ne possède pas de pôle strictement positif. Dis autrement, la FTBO doit être elle-même stable. Dans les faits, cette condition est (presque) toujours vérifiée...

4.2.2 Mise en pratique

Le point critique est ici constitué des deux droites $G_{dB(\omega)} = 0\text{dB}$ et $\phi(\omega) = -180^\circ$.

On suppose que les diagrammes de Bode (**de la FTBO !**) sont donnés.



À retenir :

Pour qu'un système asservi, stable en boucle ouverte, soit **stable** en boucle fermée il faut que les deux conditions ci-dessous (en lien avec la FTBO !) soient respectées :

- **Condition 1 :**
À la pulsation $\omega = \omega_{-180^\circ}$ telle que $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$, il faut $G_{dB}(\omega_{-180^\circ}) < 0dB$.
- **Condition 2 :**
À la pulsation $\omega = \omega_{0dB}$ telle que $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 0 dB$, il faut $\varphi(\omega_{0dB}) > -180^\circ$.

4.2.3 Marge de phase et marge gain

En pratique, il est nécessaire de faire fonctionner un système suffisamment loin de son point d'instabilité, ceci pour plusieurs raisons. Lors de la conception d'un système, de nombreuses hypothèses sont prises en compte et les modèles de fonctions de transfert ne représentent le réel que dans une certaine mesure (pas de prise en compte des non-linéarités ou des retards par exemple). Lors de l'utilisation du système, les composants électroniques ont des caractéristiques qui peuvent évoluer avec le temps (température, vieillissement...). Il est donc nécessaire de prévoir des "marges" vis-à-vis du problème d'instabilité qui permettent de garantir que le point critique ne sera jamais atteint.

À retenir (en raisonnant sur la FTBO !) :

Marge de gain. La marge de gain se détermine en plusieurs étapes :

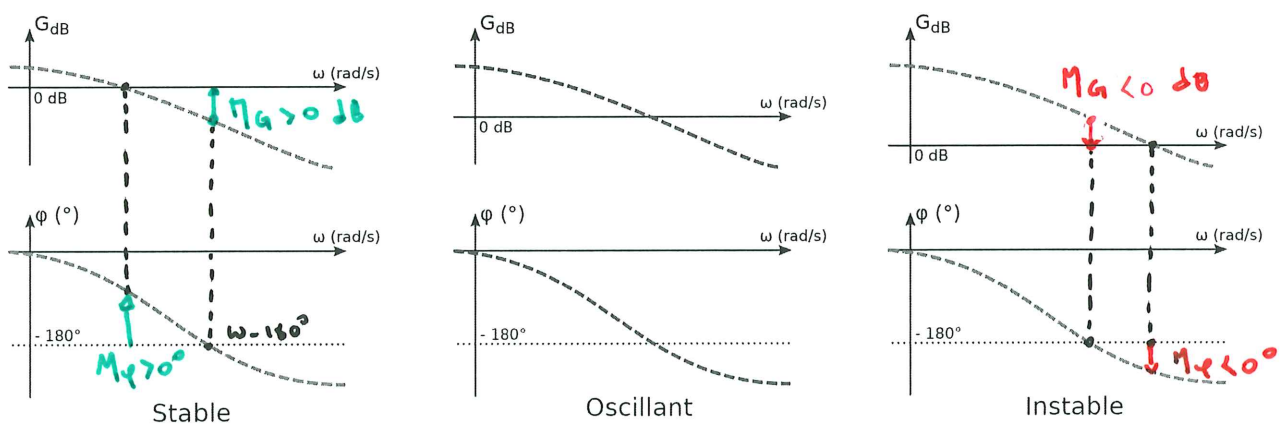
- Recherche sur le diagramme de phase de l'intersection entre la courbe $\phi(\omega)$ et la droite d'ordonnée $\phi = -180^\circ$. Les courbes s'intersectent à une abscisse ω_{-180° .
- Mesure du gain $G_{dB}(\omega_{-180^\circ})$.
- Calcul de la marge de gain telle que : $M_{G_{dB}} = -G_{dB}(\omega_{-180^\circ})$.

À retenir (en raisonnant sur la FTBO !) :

Marge de phase. La marge de phase se détermine en plusieurs étapes :

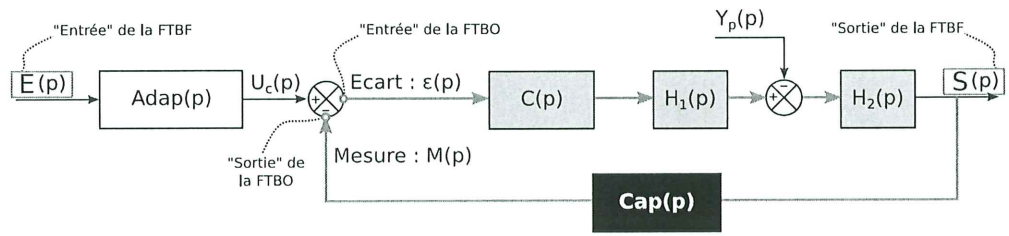
- Recherche sur le diagramme de phase de l'intersection entre la courbe $G_{dB}(\omega)$ et la droite d'ordonnée $G_{dB} = 0$. Les courbes s'intersectent à une abscisse ω_{0dB} .
- Mesure de la phase $\phi(\omega_{0dB})$.
- Calcul de la marge de phase telle que : $M_\phi = 180^\circ + \phi(\omega_{0dB})$.

À retenir :
 Un système asservi sera stable en boucle fermée si ses marges de stabilité (déterminées à partir de la FTBO !) sont positives.

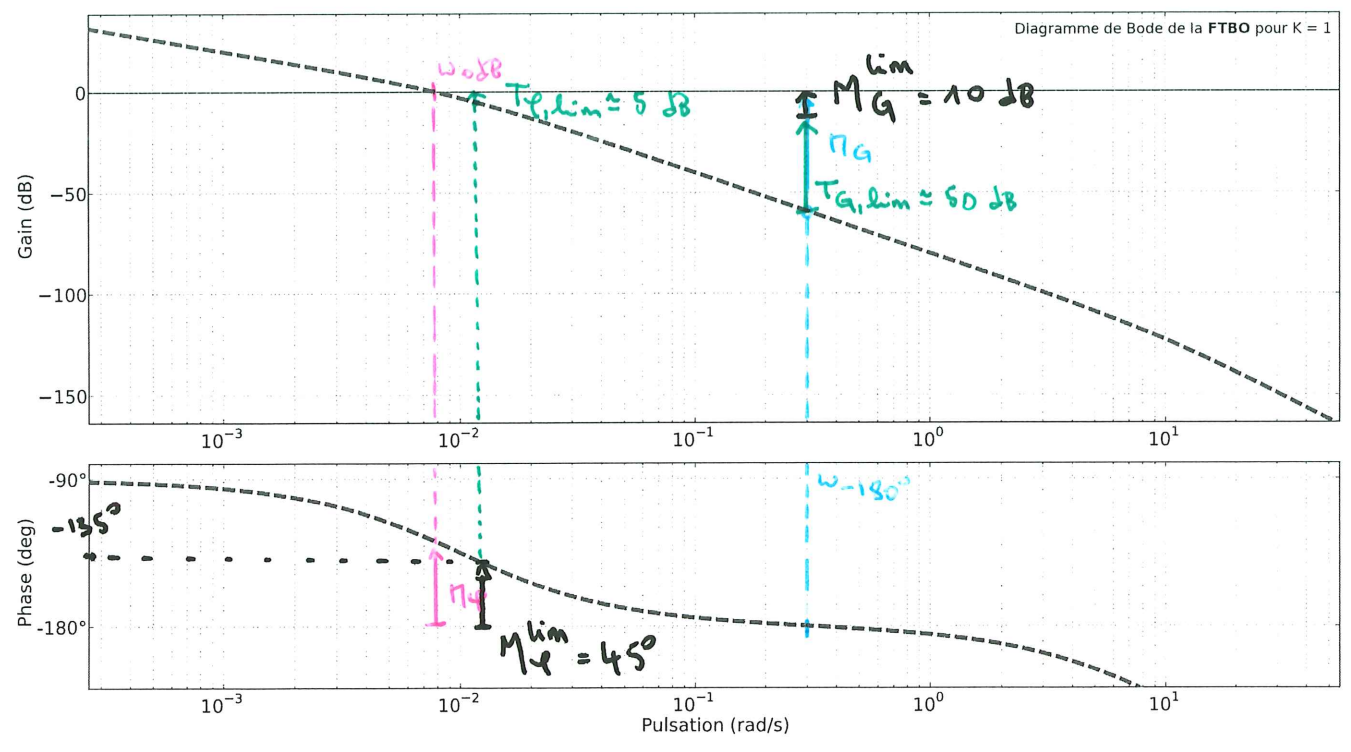


4.2.4 Mise en pratique

On suppose un asservissement ayant le schéma-bloc suivant :



On donne ci-dessous les diagrammes de Bode de la FTBO pour un correcteur de la forme $C(p) = K.C_1(p)$ et dans le cas où $K = 1$.



On souhaite ici que le système possède une marge de gain de 10 dB et une marge de phase de 45°.

Question 1 : Le système, lorsque $K = 1$, vérifie-t-il le cahier des charges ?

$$\text{Je mesure : } \Pi_G \approx 60 \text{ dB} > 10 \text{ dB}$$

$$\Pi_\varphi \approx 55^\circ > 45^\circ$$

Donc les marges sont bien respectées.

Question 2 : Que se passe-t-il si K augmente ?

$$\text{On a } FTBO(p) = K \cdot FTBO_{c_1}(p)$$

FTBO ds le cas où $K = 1$ (tracé fourni).

$$\text{Et donc : } \begin{cases} G_{dB, FTBO}(\omega) = 20 \cdot \log(K) + G_{dB, FTBO_{c_1}}(\omega) \rightarrow \text{Translat}^\circ \text{ de la cb de gain de } 20 \cdot \log(K) \\ \varphi_{FTBO}(\omega) = 0^\circ + \varphi_{FTBO_{c_1}}(\omega) \rightarrow \text{Pas de modif}^\circ \text{ de la } \varphi. \end{cases}$$

Donc si K augmente, les marges diminuent.

Question 3 : Déterminer les valeurs de K qui permettent de respecter le cahier des charges ?

• On veut $\Pi_G > 10 \text{ dB}$, il faut donc que :

$$20 \cdot \log(K) < \underbrace{50 \text{ dB}}_{T_{G, \text{lim}}}$$

$$\text{et donc } K < 10^{\frac{50}{20}}$$

$$\| K < 316$$

• On veut $\Pi_\varphi > 45^\circ$, il faut donc que :

$$20 \cdot \log(K) < \underbrace{5 \text{ dB}}_{T_{\varphi, \text{lim}}}$$

$$\text{et donc } K < 10^{\frac{5}{20}}$$

$$\| K < 1,8$$

• Pour vérifier les deux marges, il faut donc que :

$$\boxed{K < 1,8}$$

4.2.5 Causes d'instabilité

Si on rajoute un bloc supplémentaire dans la FTBO, ce qui sera le cas du rajout d'un correcteur, on pourra écrire :

$$\text{Nouvelle FTBO (p)} = \text{Bloc supplémentaire (p)} \times \text{Ancienne FTBO (p)}$$

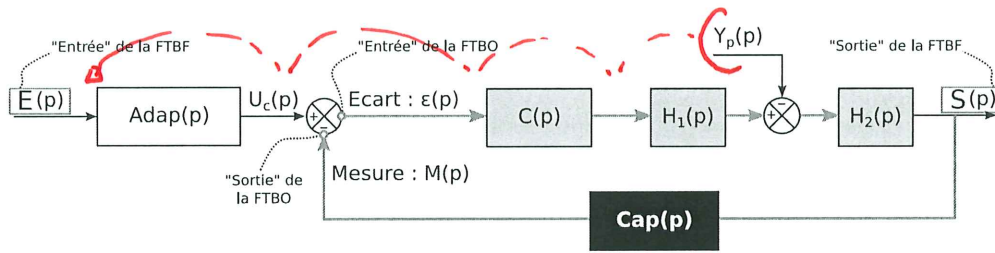
Influence d'un gain supplémentaire. La hausse du gain de la FTBO diminue les marges de stabilité.

Influence d'une intégration supplémentaire ($1/p$). La présence d'un intégrateur induit un déphasage supplémentaire de -90° , qui a une influence néfaste sur la stabilité.

Influence d'un retard pur supplémentaire ($e^{-\tau \cdot p}$). La présence d'un retard pur introduit un déphasage supplémentaire qui a une influence néfaste sur la stabilité.

4.3 Cas d'une perturbation

Écrivons, dans le cas général, les deux fonctions de transfert associées à un système asservi avec une perturbation (fonctions de transfert en poursuite et en régulation).



$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \Big|_{Y_p(p)=0} = \text{Adap}(p) \cdot \frac{C(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p)}{1 + C(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot \text{Cap}(p)}$$

$$H_P(p) = \frac{S(p)}{Y_p(p)} \Big|_{E(p)=0} = \frac{1}{H_1(p) \cdot C(p) \cdot \text{Adap}(p)} \cdot FTBF(p)$$

À retenir :

Dans le cas d'une perturbation additive, le système garde la même équation caractéristique. Cela signifie donc que l'étude de la stabilité peut se faire sans tenir compte des perturbations.

Rappel important au sujet de la FTBO :

On calculera donc : $FTBO(p) = \frac{\Pi(p)}{\Sigma(p)} \Big|_{Y_p(p)=0}$

On ne tient pas compte de la perturbation.