Spé MP

INTERFERENCES A N ONDES COHERENTES

I- Superposition de N ondes cohérentes :

Nous allons étudier la superposition de N ondes émises par N sources (sources secondaires) $S_1, S_2, S_3 .... S_N$ monochromatiques de longueurs d'onde dans le vide λ , cohérentes entre elles .
On suppose qu'on point M où elles interfèrent :
→ les N ondes ont toutes la même amplitude .
→ la différence entre les retards de phase des ondes émises par 2 sources consécutives S_{n+1} et S_n est une constante $\phi_{n+1}(M)-\phi_n(M)=\phi(M)$ noté ϕ par la suite .

1- Vibration lumineuse résultante :

Les vibrations émises par les sources S_n et S_{n+1} s'écrivent :

$$\underline{s_n}(M,t) = s_0 e^{i(\omega t - \varphi_n(M))}$$

$$\underline{s_{n+1}}(M,t) = s_0 e^{i(\omega t - \varphi_{n+1}(M))} = s_0 e^{i(\omega t - \varphi_n(M))} e^{-i(\varphi_{n+1}(M) - \varphi_n(M))}$$

$$\underline{s_{n+1}}(M,t) = \underline{s_n}(M) e^{-i\varphi}$$

La relation ci-dessus est vraie quel que soit n on peut donc exprimer toutes les vibrations en fonction de $\underline{s_1}(M,t)$ que sera la vibration de référence

$$\underline{s_2}(M,t) = \underline{s_1}(M,t) e^{-i\varphi} \qquad \underline{s_3}(M,t) = \underline{s_2}(M,t) e^{-i\varphi}$$

$$\underline{s_3}(M,t) = \underline{s_1}(M,t) e^{-2i\varphi}$$

$$\underline{s_n}(M,t) = \underline{s_1}(M,t) e^{-i(n-1)\varphi}$$

La vibration résultante en M s'écrit :

$$\underline{s}(M,t) = \sum_{n=1}^{N} \underline{s_n}(M,t) = \sum_{n=1}^{N} \underline{s_1}(M,t) e^{-i(n-1)\varphi}$$

$$= \underline{s_1}(M,t) \sum_{n=1}^{N} e^{-i(n-1)\varphi}$$

= somme d'une progression géométrique.

$$\underline{s}(M,t) = \underline{s_1}(M,t) \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}} = \underline{s_1}(M,t) \frac{e^{-iN\frac{\varphi}{2}}}{e^{-i\frac{\varphi}{2}}} \frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

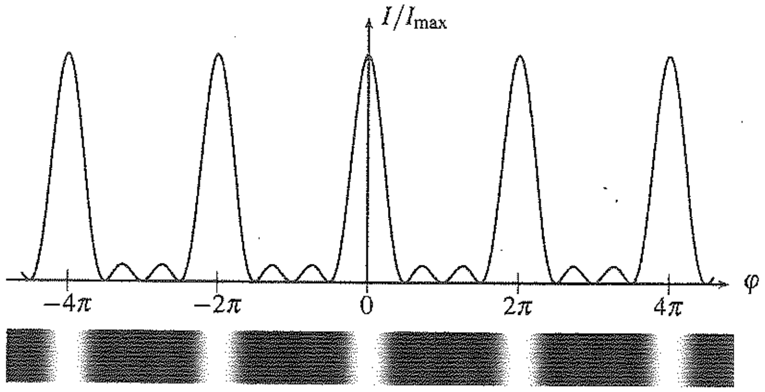
$$\boxed{\underline{s}(M,t) = \underline{s_1}(M,t) e^{-i(N-1)\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

2- Intensité vibratoire résultante :

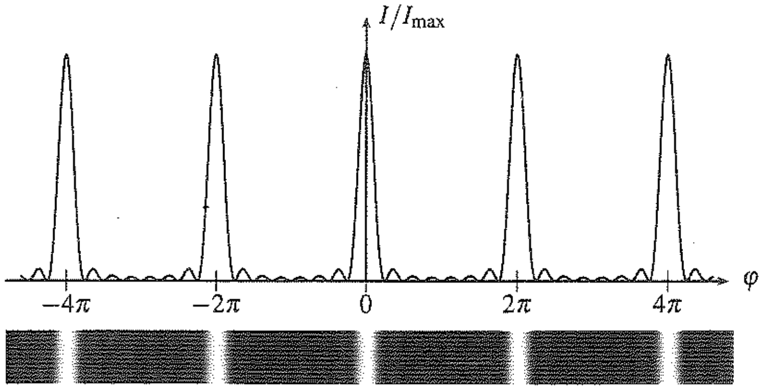
$$I(M) = K\,|s(M,t)|^2 = K\,|s_1(M,t)|^2\,\frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

$$\boxed{I(M) = I_0\,\frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

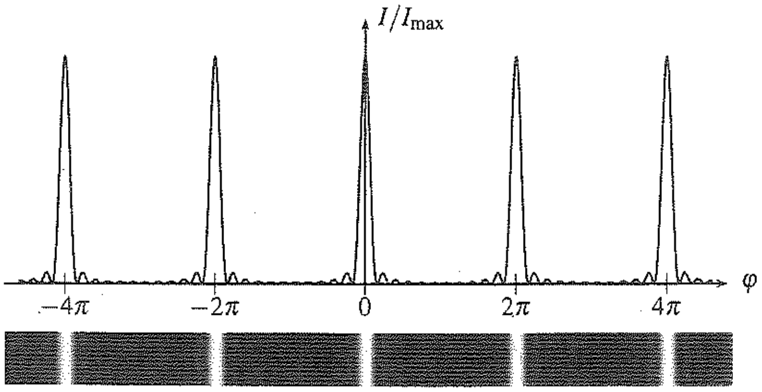
Sur les figures ci-dessous, on a représenté $\frac{I}{I_{max}}$ où I_{max} est l'intensité maximale en fonction de ϕ pour plusieurs valeurs de N .



Représentation de l'intensité vibratoire pour $N = 4$.



Représentation de l'intensité vibratoire pour $N = 8$.

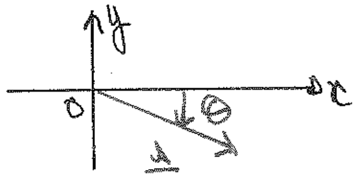


Représentation de l'intensité vibratoire pour $N = 12$.

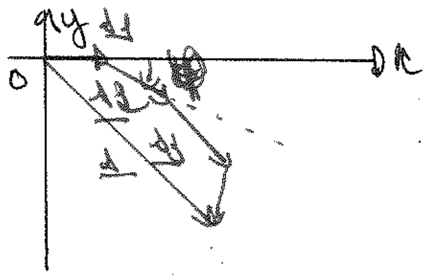
On constate sur les figures ci-dessus :
→ une série de pics d'intensité eu centre desquels l'intensité est maximale correspondant aux maxima principaux. Ils correspondent aux valeurs de ϕ pour lesquels les interférences sont constructives c'est à dire $\phi=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
→ autour des maxima principaux, l'intensité s'annule .
→ Entre deux maxima principaux, il y a des maxima secondaires .
→ on constate que plus N est grand, plus les pics correspondant aux maxima principaux sont fins, plus il y a de maxima secondaires entre deux maxima principaux consécutifs et plus l'intensité des maxima secondaires est faible .

Interprétation graphique à l'aide de la représentation de Fresnel :
→ Représentation de Fresnel d'une grandeur complexe :

$\underline{s}(M,t) = \underline{s}(M)e^{i\omega t}$ $\underline{s}(M) = s_0 e^{-i\theta}$

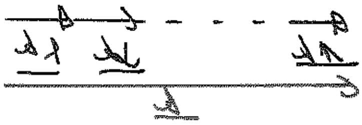


→ Représentation de la vibration résultante :
Chaque vibration $\underline{s}_n(M)$ est représentée par un vecteur, on prend une phase nulle pour $\underline{s}_1(M)$. La vibration résultante est la somme des N vibrations .



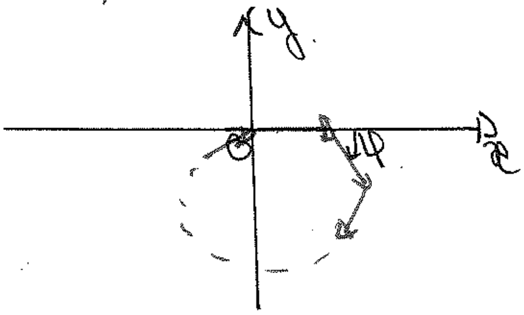
$|\underline{s_1}| = s_0$
$\underline{s_2} = \underline{s_1}e^{-j\varphi}$
$\underline{s_3} = \underline{s_2}e^{-j\varphi}$

→ Maxima principaux :
Ils sont obtenus lorsque tous les $\underline{s_n}$ sont colinéaires de même sens.



$\underline{\varphi = 2k\pi}$ $k\in\mathbb{Z}$
L'amplitude de la vibration $\underline{s}$ vaut $\underline{N s_0}$
L'intensité maximale $\underline{I_{max} = K|\underline{s}|^2 = N^2 K|s_0|^2 = N^2 I_0}$

→ Annulations de I :
Pour avoir $I = 0$, il faut qu'en sommant les $\underline{s_n}$, on obtienne une onde résultante nulle.



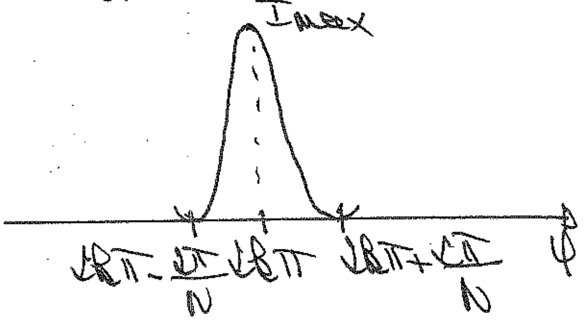
Il faut pour cela que
$N\varphi = 2q\pi$ avec $q \neq kN$
$(q,k)\in\mathbb{Z}^2$

$\varphi = \frac{2q\pi}{N}$

Autour du maximum d'ordre k, $I = 0$

pour $\boxed{\varphi = \frac{2k\pi}{N} \pm \frac{2\pi}{N}}$ $\quad (q = kN \pm 1)$

Largeur d'un maximum principal $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{N}$



On retrouve le fait que plus N est grand plus les maxi sont fins.

Entre 2 maxima principaux I s'annule $N-1$ fois et présente $N-2$ maxima secondaires.

· Etude à partir de l'expression de $I(\phi)$ ·

$$I(M) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

→ Maxi principaux $\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$

cad $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = k\pi \Rightarrow \varphi = 2k\pi$

$\varphi' = \varphi - 2k\pi$, $\varphi' \to 0$ $\qquad I(M) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi'}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)} \simeq I_0 \frac{\left(\frac{N\varphi'}{2}\right)^2}{\left(\frac{\varphi'}{2}\right)^2} = N^2 I_0$

→ $I = 0$ lorsque $\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0$

$\frac{N\varphi}{2} = p\pi$ $\qquad \boxed{\varphi = \frac{2p\pi}{N}}$ avec $p \neq kN$

$\frac{\varphi}{2} \neq k\pi$

II- Réseau de diffraction :

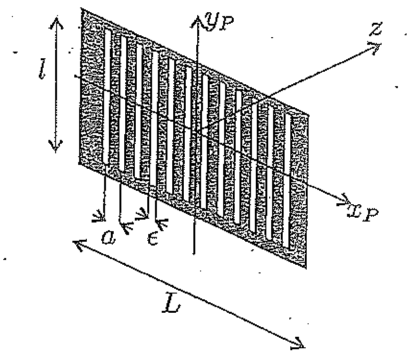
1- Définition :

Un réseau est une surface diffractante sur laquelle un motif est répété un grand nombre de fois . La période spatiale caractérisant la surface s'appelle le pas du réseau : a . Les motifs sont appelés les traits du réseau .
Un réseau peut être aussi caractérisé par son nombre de traits par unité de longueur .

Le motif peut être une fente ou plus généralement une forme particulière de la surface comme la gravure d'un trait .
Rem : la surface d'un CD formée de petits motifs répétés constitue un réseau : elle décompose la lumière blanche et la surface apparaît colorée différemment selon l'orientation du disque .

Dans le cours non considérerons uniquement des réseaux par transmission pour lesquels la lumière diffractée traverse le réseau mais il existe aussi des réseaux par réflexion .

Modélisation d'un réseau par transmission :

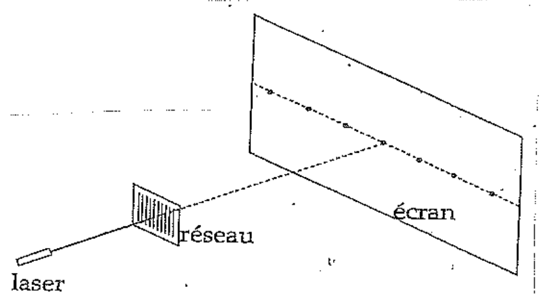


Réseau constitué par N traits percés dans un écran opaque , ces fentes rectangulaires ont une largeur $\varepsilon \ll$ à leur longueur l .
Nous le supposons éclairé sur sa largeur totale $L = N a$.

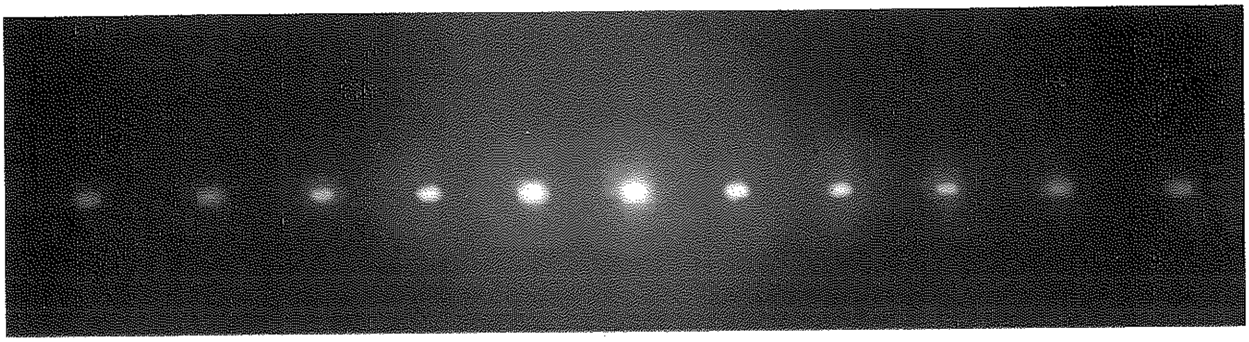
Ordres de grandeurs :
Un réseau optique comprend typiquement 100 à 1000 traits par millimètre : a = 1 à 10 µm , il est éclairé sur une longueur L de quelques mm $N = \frac{L}{a}$ vaut au minimum quelques centaines .

2-Diffraction d'une lumière monochromatique par un réseau :

2-1Expérience :

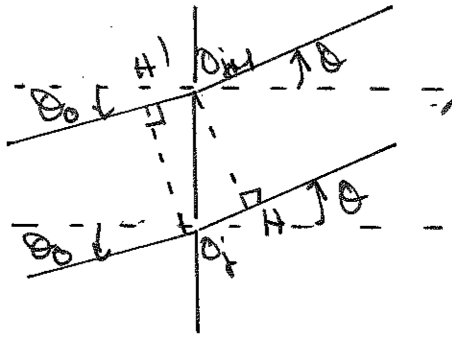


Soit un réseau éclairé par un faisceau laser orthogonal au plan du réseau .



Sur l'écran on observe une succession de taches régulièrement espacées dont l'une est dans le prolongement du faisceau incident (tâche centrale correspondant à la direction de l'optique géométrique .
Si on translate le réseau dans son plan , la figure observée ne change pas .
Si on remplace le réseau par un réseau de plus grand pas les taches sont plus serrées , si on le remplace par un réseau de pas plus faible elles sont plus espacées .

<u>2-2Formule des réseaux :</u>
Approche interférentielle : une source monochromatique de longueur d'onde λ_o dans le vide éclaire un réseau , étudions les rayons diffractés à l'infini : ils sont issus d'une même source et sont donc cohérents .
<u>L'amplitude diffractée par le réseau à l'infini résulte des interférences entre les rayons issus de tous les motifs éclairés : interférences à N ondes .</u>
Considérerons un réseau tel que (Oz) est orthogonal au plan du réseau éclairé par une oppm de longueur d'onde λ_o arrivant sous un angle θ_o . $l >> \varepsilon$ il n'y a pas de diffraction selon la direction Oy .
Soit θ l'angle repérant une direction de diffraction quelconque . Soient O_1 , O_2.... O_N les centres des traits du réseau .
Déterminons la différence de marche entre 2 traits consécutifs .



$a = O_jO_{j+1}$

$\oplus$ Milieu homogène d'indice n

$\delta = n\left[O_jH - O_{j+1}H'\right]$ d'après le th. de Malus

$\delta = n(a \sin\theta - a \sin\theta_0)$

$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n a(\sin\theta - \sin\theta_0)$

Maximum d'ordre k est tel que $\varphi = 2k\pi$

$\frac{2\pi}{\lambda_0} n a(\sin\theta_k - \sin\theta_0) = 2k\pi$

$\boxed{\sin\theta_k - \sin\theta_0 = \frac{k\lambda_0}{na}}$ k = ordre de diffraction
Formule des réseaux

Pour $n = 1$: $\sin\theta_k - \sin\theta_0 = \frac{k\lambda_0}{a}$

Prenons le cas où $\theta_0 = 0$: incidence normale

$\sin\theta_k = k\frac{\lambda_0}{a}$

Il y a au moins un ordre visible si $\frac{\lambda_0}{a} < 1$

$\Rightarrow$ $a > \lambda_0$

Si on veut séparer 2 ordres consécutifs $\Delta\theta > 0{,}1$ rad

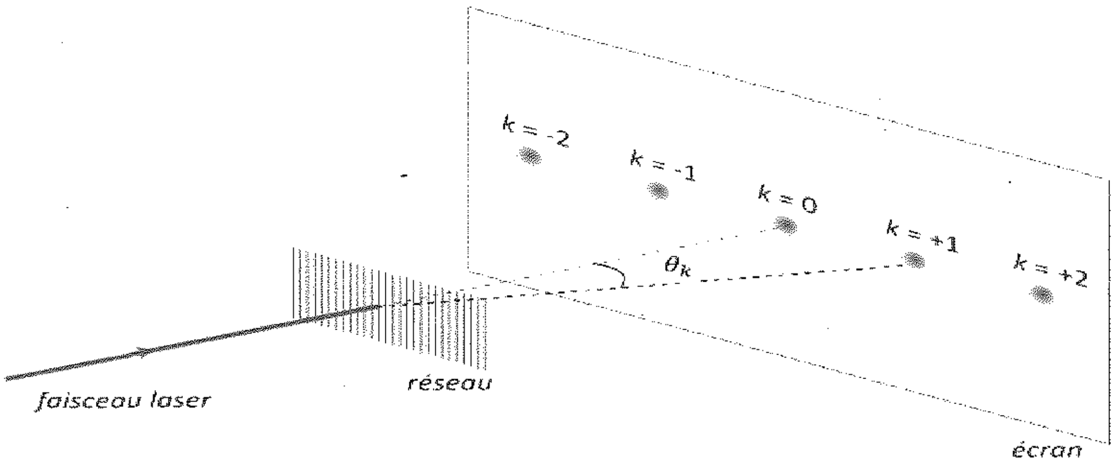
$\sin\theta_{k+1} - \sin\theta_k > \frac{1}{10}$

$\frac{\lambda_0}{a} > \frac{1}{10}$ $\quad$ $a < 10\lambda_0$

Typiquement : $\lambda_0 < a < 10\lambda_0$

3- Figure de diffraction à l'infini :

a- Source ponctuelle :



* $\sin\theta_k - \sin\theta_0 = k\frac{\lambda_0}{a}$

Ordre 0 : k = 0 , θ = θo direction de l'optique géométrique . Quelle que soit la longueur d'onde l'ordre 0 se trouve dans la direction θo , l'ordre 0 n'est pas dispersif .

Ordres $k \neq 0$: $\sin\theta_k = \sin\theta_0 + k\frac{\lambda_0}{a}$ la position des ordres $m \neq 0$ dépend de θo , de a et surtout de la longueur d'onde λo = ordres dispersifs .
Si le pas est connu , la mesure des directions des rayons diffractés permet d'en déduire la longueur d'onde du rayonnement considéré = le réseau fonctionne en spectromètre .
Si λo connue , on peut déterminer le pas du réseau .

Montage expérimental :

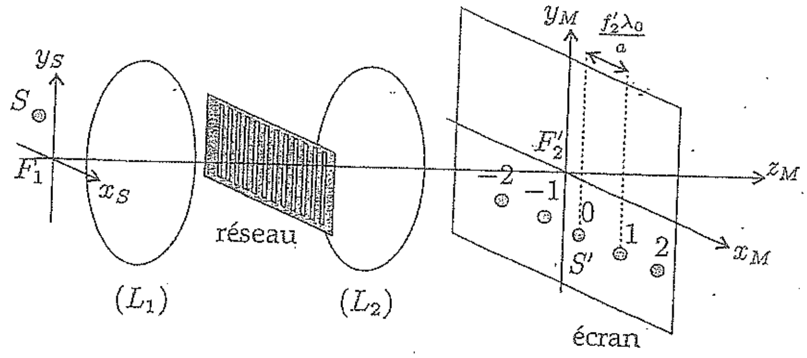


Figure 4 – Réseau éclairé par une point source en lumière monochromatique. Le chiffre au-dessus de la tâche est l'ordre de diffraction.

On observe une série de points lumineux (ordres de diffraction) de part et d'autre de l'image géométrique de la source.

Entre deux points la distance angulaire est de $\frac{\lambda_0}{a}$ soit une distance de $f'_2\frac{\lambda_0}{a}$

b- Fente source :

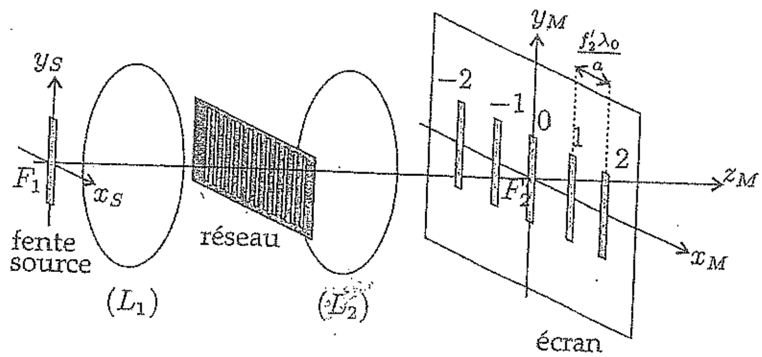
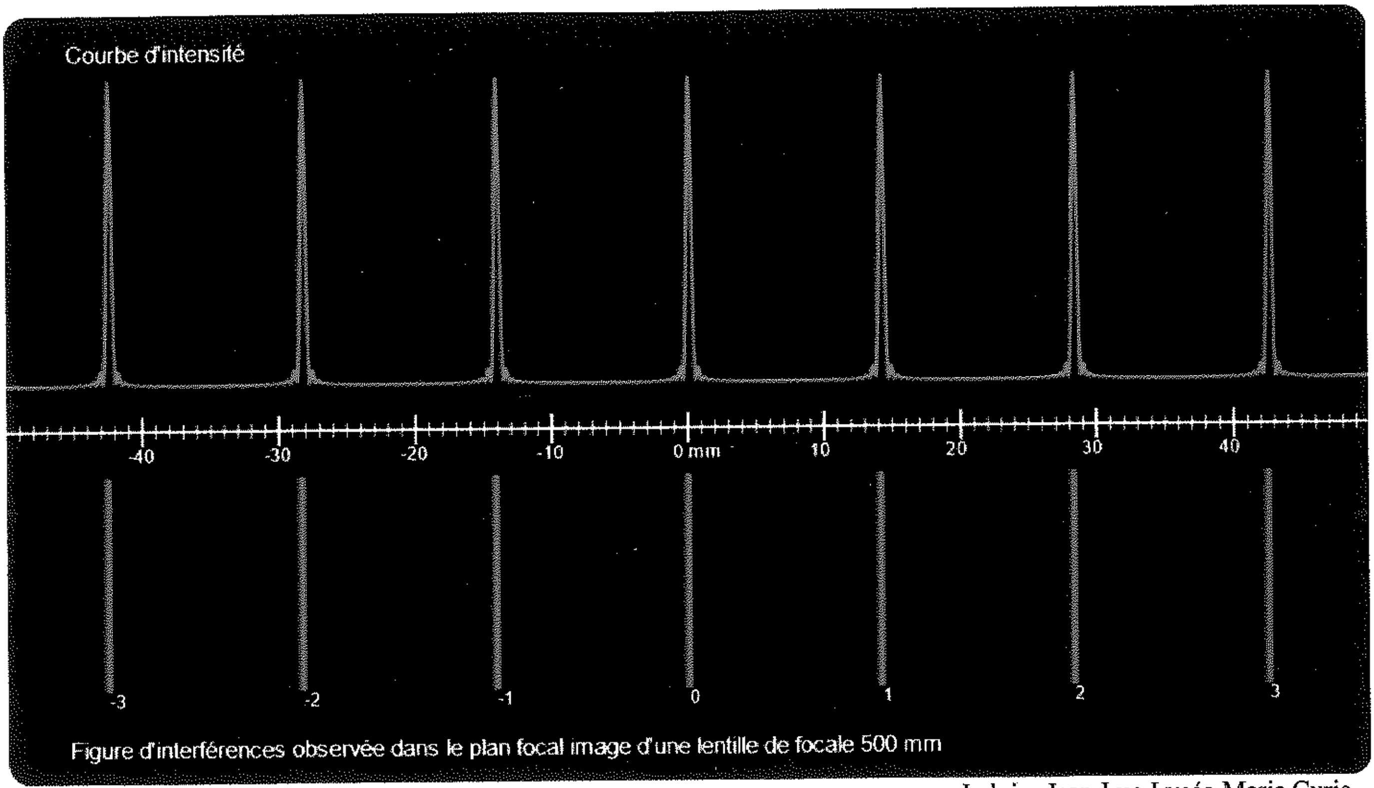


Figure 5 – Réseau éclairé par une fente source en lumière monochromatique.

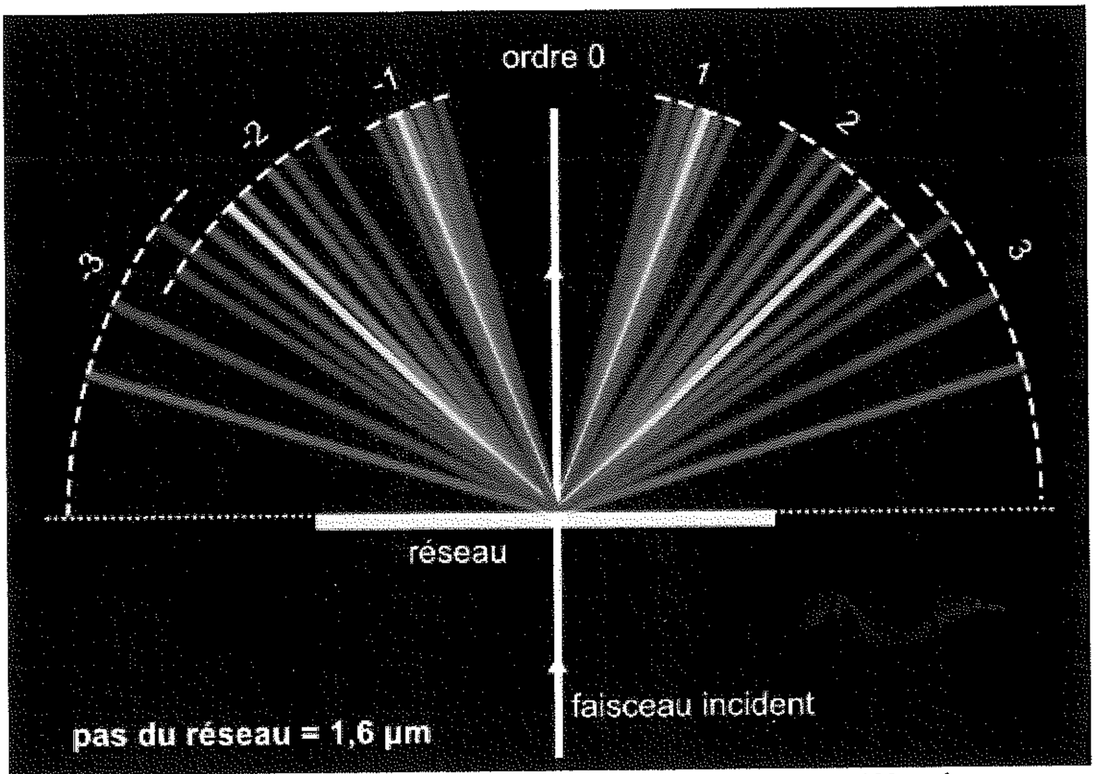
La figure de diffraction est la superposition des figures produites par chaque chaque points sources ceux-ci étant incohérents entre eux .



Leloire Jean-Luc Lycée Marie Curie

Vire 2016

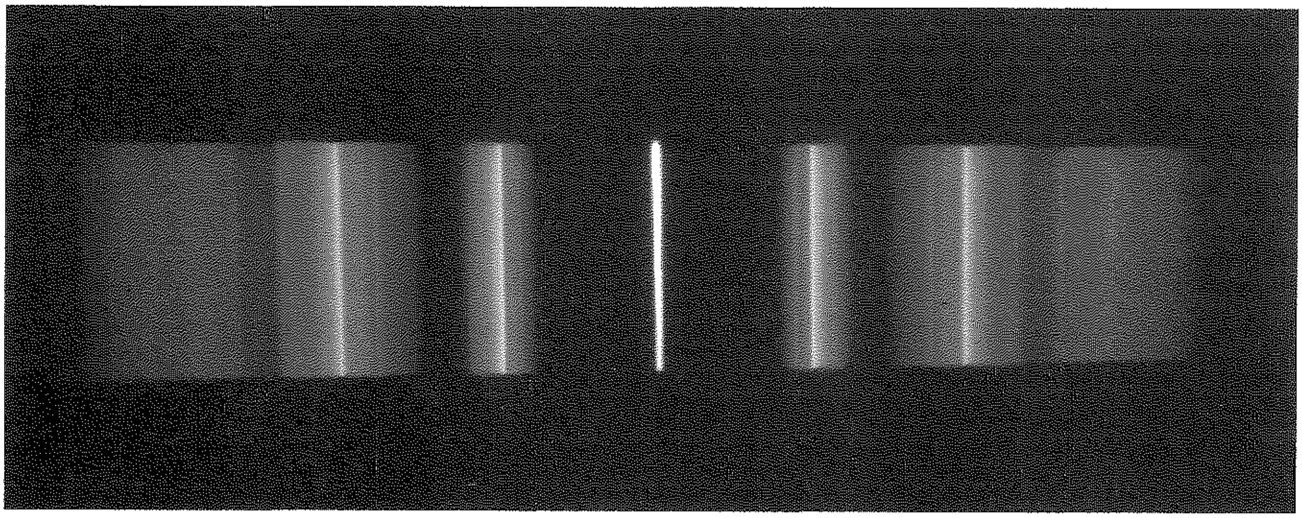
4- Lumière blanche :



123 couleurs

ordre 0 : $\theta = \theta_0$ quelle que soit λ , on observera donc de la lumière blanche .
Ordres $k \neq 0$: θk dépend de la longueur d'onde , suivant sa couleur le rayon émergera du réseau avec un angle différent : dispersion de la lumière .

A partir de l'ordre 0 , on peut déterminer la position des différentes couleurs $\sin\theta_k = \sin\theta_0 + k\dfrac{\lambda_0}{a}$, dans un ordre donné on observe d'abord le bleu puis les différentes couleurs par ordre croissant de longueur puis en dernier le rouge .
La différence entre les angles relatifs aux couleurs rouge et bleu dans un ordre k augmente avec k : plus l'ordre est grand plus le réseau est dispersif et plus les différentes couleurs sont séparées . (mais on ne peut pas travailler dans des ordres élevés car à cause de la diffraction l'intensité diminue quand l'ordre augmente) .



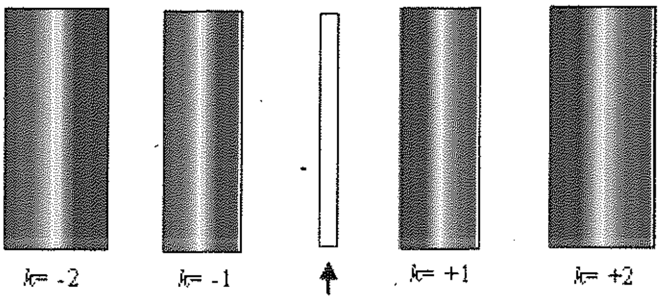


Image de la fente

En spectrométrie le réseau est en général préféré au prisme car la formule des réseaux montre que l'on peut directement relier θ_k et la longueur d'onde λ sans faire intervenir les propriétés du milieu (pour le prisme il est nécessaire de connaître la relation n (λ)) , le réseau est plus dispersif et est utilisable dans l'IR (le verre absorbe les IR) .

5- Minimum de déviation :

Réseau éclaire par une source monochromatique de longueur d'onde λ.
Dans l'ordre k l'angle de déviation est défini par $D_k = \theta_k - \theta_0$ dépendant de λ .
Quand θo varie D_k passe par un minimum pour une valeur θ_{0min} .

Dérivons la formule des réseaux $\sin\theta_k - \sin\theta_0 = k\dfrac{\lambda}{a}$ par rapport à θ_0 :

$$\cos\theta_k \frac{d\theta_k}{d\theta_0} - \cos\theta_0 = 0 \qquad \frac{dD_k}{d\theta_0} = \frac{d\theta_k}{d\theta_0} - 1 = 0 \qquad \text{d'où } \cos\theta_k = \cos\theta_0$$

soit $\theta_k = \theta_0$ exclu car correspond à la direction incidente
doit $\theta_k = -\theta_0$ au minimum de déviation les faisceaux incident et diffracté ont des directions symétriques par rapport à la normale au réseau ..

Pour λ donnée , dans l'ordre k $D_{m,k} = -2\theta_{0min}$ $\quad -2\sin\theta_{0min} = k\dfrac{\lambda}{a}$ $\quad \sin\left(\dfrac{D_{m,k}}{2}\right) = \dfrac{k\lambda}{2a}$