STABILISATEUR de CAMÉRA

1. /

2. J'isole E soumis aux actions mécaniques extérieures suivants :

- $1 \to E$
- $pds \to E$

a) J'écris le th. des moments en O et en projection sur $\vec{y_0}$:

$$\underbrace{\vec{M}_{O,1\to E}\cdot\vec{y_0}}_{=0} + \vec{M}_{O,pds\to E}\cdot\vec{y_0} = \vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{y_0}$$

Où :

$$\vec{\delta}_{O,E/0}\cdot\vec{y_0} = \vec{\delta}_{G_c,E/0}\cdot\vec{y_0} + (\vec{OG_c}\wedge\vec{Rd}_{E/0})\cdot\vec{y_0}$$

et

$$\vec{\delta}_{G_c,E/0}\cdot\vec{y_0} = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{G_c,E/0})_0\cdot\vec{y_0} + (m_c\cdot\underbrace{\vec{V}_{G_c/0}\wedge\vec{V}_{G_c\in E/0}}_{=\vec{0}\ \text{car même vitesse}})\cdot\vec{y_0}$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{G_c,E/0}\cdot\vec{y_0})$$

avec

$$\vec{\sigma}_{G_c,E/0}\cdot\vec{y_0} = (\underbrace{I_{G_c}(E)}_{=0}\cdot\vec{\Omega}_{E/0})\cdot\vec{y_0} + (m_c\cdot\cancel{\vec{G_cG_c}}\wedge\vec{V}_{G_c\in E/0})\cdot\vec{y_0}$$

=0 car E est un modélisé par un point matériel situé en Gc

donc

$$\vec{\delta}_{G_c,E/0}\cdot\vec{y_0} = 0$$

On a aussi :

$$\vec{Rd}_{E/0} = m_c\cdot\frac{d}{dt}(\vec{V}_{G_c\in E/0})_0$$

Avec

$$\vec{V}_{G_c\in E/0} = \cancel{\vec{V}_{O\in E/0}} + \vec{G_cO}\wedge\vec{\Omega}_{E/0} = -L_c\cdot\vec{z_2}\wedge(\dot{\varphi}\cdot\vec{y}_{02})$$

$$\vec{V}_{G_c\in E/0} = L_c\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{x_2}$$

Et

$$\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big|_0 = \cancel{\frac{d\vec{x_2}}{dt}}\Big|_2 + \underbrace{\vec{\Omega}_{2/0}}_{\dot{\varphi}\cdot\vec{y_2}}\wedge\vec{x_2} = -\dot{\varphi}\cdot\vec{z_2}$$

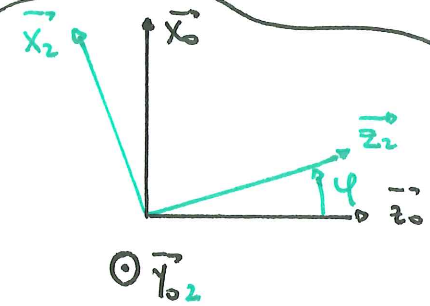
Donc $\overrightarrow{Rd_{E/0}} = m_c . L_c . \ddot{\varphi} . \vec{X_2} - m_c . L_c . \dot{\varphi}^2 . \vec{Z_2}$

Donc $\vec{\delta}_{O,E/0} . \vec{Y_0} = \left(L_c . \vec{Z_2} \wedge \left(m_c . L_c . \ddot{\varphi} . \vec{X_2} - m_c . L_c . \dot{\varphi}^2 . \vec{Z_2} \right)\right) . \vec{Y_{02}}$

D'où $\vec{\delta}_{O,E/0} . \vec{Y_0} = m_c . L_c^2 . \ddot{\varphi}$

Et $\vec{M}_{O,pds \to E} . \vec{Y_0} = \cancel{\vec{M}_{G_c,pds \to E}} . \vec{Y_0} + \left(\overbrace{\overrightarrow{OG_c}}^{L_c . \vec{Z_2}} \wedge \left(- m_c . g . \vec{Z_0} \right)\right) . \vec{Y_0}$

$= m_c . g . L_c . \sin\varphi$



$(\vec{Z_2} \wedge \vec{Z_0}) . \vec{Y_0} = \sin(-\varphi)$

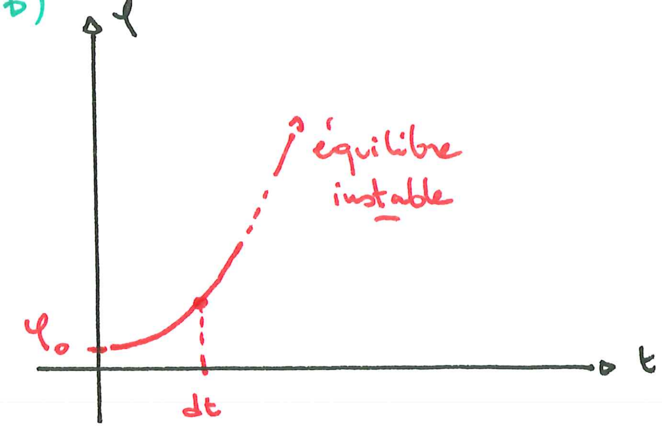
$= -\sin\varphi$

On a donc :

$\cancel{m_c} . g . \cancel{L_c} . \sin\varphi = \cancel{m_c} . L_c^{\cancel{2}} . \ddot{\varphi}$

Donc $\boxed{\ddot{\varphi} - \frac{g}{L_c} . \sin\varphi = 0}$

b)



- À l'instant initial : $\varphi(0) = \varphi_0 \quad (\varphi_0 > 0)$
  $\dot{\varphi}(0) = 0$

  Donc $\ddot{\varphi}(0) > 0 \quad$ (si $L_c > 0$)

  Donc $\dot{\varphi}(0 + dt) > 0$

  et $\varphi(0 + dt) > \varphi_0$

- Si $\varphi(dt) > \varphi_0$ alors $\ddot{\varphi}(dt) > \ddot{\varphi}(0)$

  Donc le pendule s'écarte de plus en plus de sa position d'équilibre !

c) On parle alors d'équilibre instable.

d) Il faudrait que $\ddot{\varphi}(0) < 0$ si $\varphi_0 > 0$ et donc que $L_c < 0$. Cela signifie que le centre de gravité est situé "sous" l'axe de la pivot pour avoir un équilibre stable. Dis autrement : $\overrightarrow{OG_c} . \vec{Z_2} < 0$.

3. Soit G le centre de gravité de l'ensemble.

On peut écrire :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_c + m_{cp}} \cdot (m_c \cdot \overrightarrow{OG_c} + m_{cp} \cdot \overrightarrow{OG_{cp}})$$

$$= \frac{1}{m_c + m_{cp}} \cdot (m_c \cdot L_c - m_{cp} \cdot L_{cp}) \cdot \overrightarrow{z_2}$$

L'équilibre sera stable si $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{z_2} < 0$ et donc si :

$$\underline{m_c \cdot L_c - m_{cp} \cdot L_{cp} < 0}$$

4. J'isole l'ensemble E' soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :
- $1 \rightarrow E'$
- $pds \rightarrow E'$

J'écris le th. des moments en O et en projection sur $\overrightarrow{y_0}$.

$$\overrightarrow{M_0}(1 \rightarrow E') \cdot \overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{M_0}(pds \rightarrow E') \cdot \overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{\delta_0}(E'/0) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

Où :
- $\overrightarrow{M_0}(1 \rightarrow E') \cdot \overrightarrow{y_0} = -f \cdot \dot{\varphi}$
- $\overrightarrow{M_0}(pds \rightarrow E') \cdot \overrightarrow{y_0} = \cancel{\overrightarrow{M_G}(pds \rightarrow E')} \cdot \overrightarrow{y_0} + (\overrightarrow{OG} \wedge (-(m_c + m_{cp}) \cdot g \cdot \overrightarrow{z_0})) \cdot \overrightarrow{y_0}$

$$= \left[\frac{1}{\cancel{m_c + m_{cp}}} \cdot (m_c \cdot L_c - m_{cp} \cdot L_{cp}) \cdot \overrightarrow{z_2} \wedge (-(\cancel{m_c + m_{cp}}) \cdot g \cdot \overrightarrow{z_0})\right] \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$= (m_c \cdot L_c - m_{cp} \cdot L_{cp}) \cdot g \cdot \sin\varphi$$

$$= -\underbrace{(m_{cp} \cdot L_{cp} - m_c \cdot L_c)} \cdot g \cdot \sin\varphi$$

Rmq : >0 si équilibre stable

- $\overrightarrow{\delta_0}(E'/0) \cdot \overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{\delta_0}(\overset{\text{caméra}}{c}/0) \cdot \overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{\delta_0}(\overset{\text{contre-poids}}{cp}/0) \cdot \overrightarrow{y_0}$

où $\overrightarrow{\delta_0}(c/0) \cdot \overrightarrow{y_0} = \underbrace{\overrightarrow{\delta_{G_c}}(c/0) \cdot \overrightarrow{y_0}}_{= 0 \text{ : même calcul que q° 2.a.}} + (\overrightarrow{OG_c} \wedge \underbrace{\overrightarrow{Rd}(c/0)}) \cdot \overrightarrow{y_0}$

⚠ ici $\overrightarrow{V}_{G_c \in c/0}$ a changé !

Calculons $\overrightarrow{V}_{G_c \in c/0} = \overrightarrow{V}_{G_c \in c/1} + \underbrace{\overrightarrow{V}_{G_c \in 1/0}}_{v \cdot \overrightarrow{x_0}}$

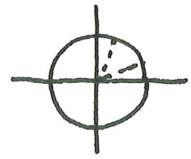
Et $\vec{V}_{G_c \in c/1} = \cancel{\vec{V}_{O \in c/1}} + \vec{G_c O} \wedge \vec{\Omega}_{c/1}$

$$= - L_c \cdot \vec{Z_2} \wedge (\dot{\varphi} \cdot \vec{Y_{02}})$$

$$= L_c \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{X_2}$$

$(\vec{Z_2} \wedge \vec{X_0}) \cdot \vec{Y_0} = \sin(-\varphi + \frac{\pi}{2})$

$= \cos(\varphi)$



Donc $\boxed{\vec{V}_{G_c \in c/0} = v \cdot \vec{X_0} + L_c \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{X_2}}$

Donc $\vec{R}_{d\,2/0} = m_c \cdot \frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{G_c \in c/0}\right]_0$

$$= m_c \cdot \left[\dot{v} \cdot \vec{X_0} + L_c \cdot \ddot{\varphi} \cdot \vec{X_2} - L_c \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \vec{Z_2}\right]$$

Donc $\vec{\delta}_0(c/0) \cdot \vec{Y_0} = \left(L_c \cdot \vec{Z_2} \wedge (m_c (\dot{v} \cdot \vec{X_0} + L_c \cdot \ddot{\varphi} \cdot \vec{X_2} - L_c \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \vec{Z_2}))\right) \cdot \vec{Y_{02}}$

$$= \underline{m_c \cdot L_c \cdot \dot{v} \cdot \cos\varphi + m_c \cdot L_c^2 \cdot \ddot{\varphi}}$$

De la m̂ manière: $\vec{\delta}_0(cp/0) \cdot \vec{Y_0} = \underline{- m_{cp} \cdot L_{cp} \cdot \dot{v} \cdot \cos\varphi + m_{cp} \cdot L_{cp}^2 \cdot \ddot{\varphi}}$

On obtient donc:

$$- \rho \cdot \dot{\varphi} - (m_{cp} \cdot L_{cp} - m_c \cdot L_c) \cdot g \cdot \sin\varphi = (m_c \cdot L_c^2 + m_{cp} \cdot L_{cp}^2) \cdot \ddot{\varphi} - (m_{cp} \cdot L_{cp} - m_c \cdot L_c) \cdot \underbrace{\dot{v}}_{= a} \cdot \cos\varphi$$

Ou encore:

$$\underbrace{[m_c \cdot L_c^2 + m_{cp} \cdot L_{cp}^2]}_{= Q_1} \cdot \ddot{\varphi} + \underbrace{\rho}_{= Q_2} \cdot \dot{\varphi} + \underbrace{(m_{cp} \cdot L_{cp} - m_c \cdot L_c) \cdot g}_{= Q_3} \cdot \sin\varphi = \underbrace{(m_{cp} \cdot L_{cp} - m_c \cdot L_c) \cdot a}_{= Q_4} \cdot \cos\varphi$$

<u>Remarque</u>: il existe une autre méthode pour calculer $\vec{\delta}_0(E'/0) \cdot \vec{Y_0}$. On peut effet écrire:

$$\vec{\delta}_0(c/0) \cdot \vec{Y_0} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_0(c/0)\right]_0 \cdot \vec{Y_0} + \left(m_c \cdot \underbrace{\vec{V}_{0/0}}_{= v \cdot \vec{X_0}} \wedge \underbrace{\vec{V}_{G_c \in c/0}}_{= v \cdot \vec{X_0} + L_c \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{X_2}}\right) \cdot \vec{Y_0}$$

Donc $(m_c \cdot \vec{V}_{0/0} \wedge \vec{V}_{G_c \in c/0}) \cdot \vec{Y_0} = m_c \cdot L_c \cdot \dot{\varphi} \cdot v \cdot \sin\varphi$

Et $\vec{\sigma}_0(c/0) \cdot \vec{Y_0} = \underbrace{\vec{\sigma}_{G_c}(c/0) \cdot \vec{Y_0}}_{= 0 \text{ : m̂ calcul que q° 2.a.}} + \left(\underbrace{\vec{OG_c}}_{L_c \cdot \vec{Z_2}} \wedge \underbrace{\vec{p}(c/0)}_{m_c \cdot \underbrace{\vec{V}_{G_c \in c/0}}_{v \cdot \vec{X_0} + L_c \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{X_2}}}\right) \cdot \vec{Y_0}$

$$= m_c \cdot L_c \cdot v \cdot \cos\varphi + m_c \cdot L_c^2 \cdot \dot{\varphi}$$

On a donc : $\vec{\delta}_0(c/0)\cdot\vec{y}_0 = m_c\cdot L_c\cdot\dot{v}\cdot\cos\varphi - m_c\cdot\cancel{L_c\cdot v\cdot\dot{\varphi}}\cdot\sin\varphi + m_c\cdot L_c^2\cdot\ddot{\varphi}$

$$+ m_c\cdot\cancel{L_c\cdot v\cdot\dot{\varphi}}\cdot\sin\varphi$$

On retrouve bien le m résultat.

5. a) Si $O = G$: $Q_1\cdot\ddot{\varphi} + Q_2\cdot\dot{\varphi} = 0$

Bouger la pièce 1 n'a pas d'influence (a n'apparait plus dans l'éq° de mouvement)

b) Si $G \neq O$: a est bien dans l'éq° de mvt donc

Bouger la pièce 1 influence l'angle φ.