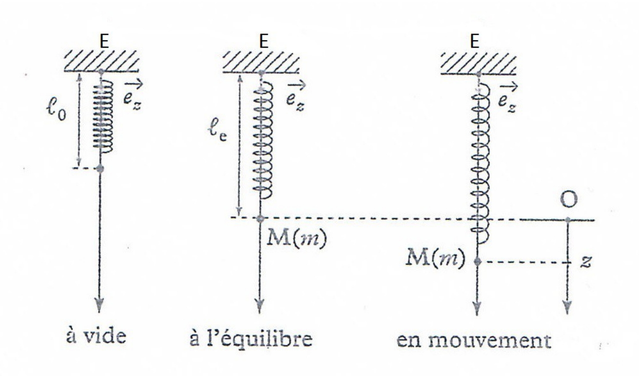
EXERCICES MECANIQUE DU POINT .

Exercice 1 :ressort vertical

On accroche une masse m, à l'extrémité d'un ressort de raideur k, de longueur à vide lo et de masse négligeable. Le. référentiel $(O, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



1- Déterminer la longueur le du ressort à l'équilibre . L'origine de l'axe des z est choisi par la suite comme étant la position de M à l'équilibre.

2- On écarte la masse d'une distance a par rapport à la position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale . On prend en compte la présence d'une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse de la masse m (coefficient h>0) .

Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse et la forme de sa solution (on étudiera les différents cas possibles).

Dans le cas du régime pseudo-périodique, déterminer z(t) et représenter le portrait de phase de l'oscillateur .

3-On met maintenant en mouvement le point d'attache E du ressort selon l'axe des z , on note $z_E = z_0 \cos wt$, le déplacement de E par rapport à sa position initiale .

a- Déterminer l'équation du mouvement de M .

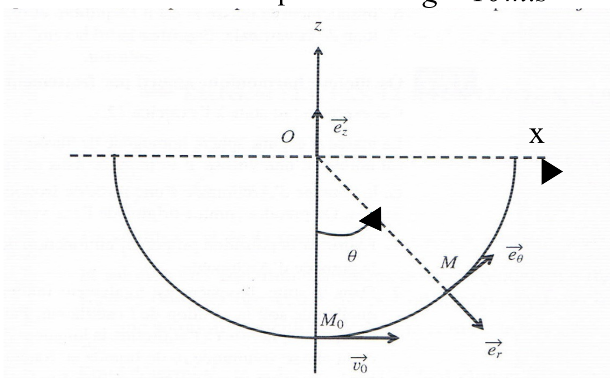
b- Déterminer $z_M(t)$ en régime établi . Représenter l'évolution de l'amplitude des oscillations en fonction de w , on étudiera l'influence de λ .

On posera $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{h}{2m}$

Exercice 2 :Mouvement pendulaire amorti

Un petit objet assimilé à un point matériel M, de masse m, peut glisser sans frottement à l'intérieur d'un rail ayant la forme d'un demi-cercle de centre O et de rayon R, placé dans un plan vertical.

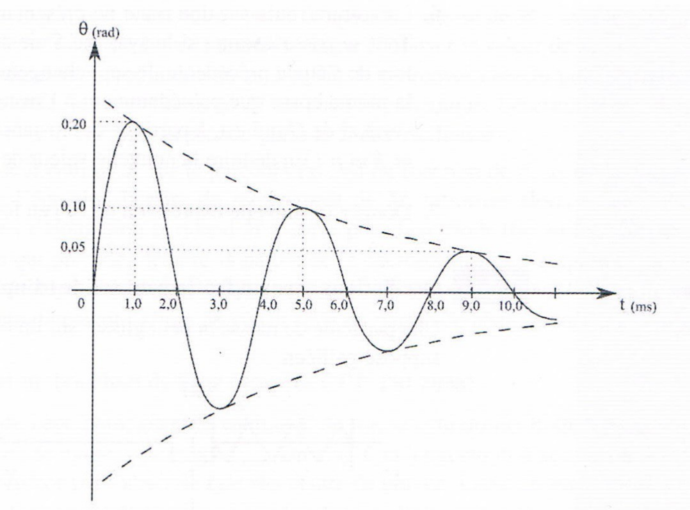
On repère la position du point M a l'instant t par $\theta(t) = (\vec{OM}_0, \vec{OM}(t))$. A l'instant t = 0, l'objet est lancé du point M_0 avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. Dans tout le problème, on utilisera la base de projection polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ On prendra pour valeur de l'accélération de pesanteur $g = 10\, m.s^{-2}$.



1- Faire l'inventaire des forces appliquées à M et les représenter sur un schéma clair lorsque point est dans une position M(t) quelconque. On précisera les composantes de ces forces dans la base polaire.

2-En déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction θ(t).
3- Déterminer, pour une position θ quelconque de M, l'expression de la réaction exercée par le rail sur M en fonction de m, g, θ, v_0 et R .
4- Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en choisissant l'origine des énergies potentielles en θ= 0 . On suppose que vo est telle que M ne quitte pas le demi cercle , à l'aide d'une étude énergétique déterminer la valeur maximale de l'angle θo ; déterminer une condition sur vo pour que cette situation puisse être réalisée .
5- On suppose que la norme vo du vecteur vitesse initial est suffisamment faible pour que condition θ « 1,0 rad soit satisfaite à chaque instant. Déterminer complètement l'expression de θ(t) dans cette hypothèse en fonction de vo, g, R et t.

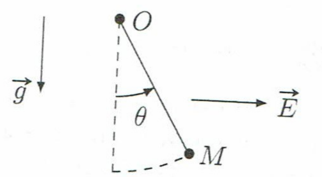
On suppose à partir de maintenant que le point M subit au cours de son mouvement force de frottement fluide $\vec{f}=-\lambda\vec{v}$ où λ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du point M à l'instant t. La condition θ « 1,0 rad reste également satisfaite à ch instant.
6- Établir la nouvelle équation différentielle satisfaite par 0(t).
7- Les grandeurs m, g et R étant fixées, donner la condition portant sur λ pour que le mouvement soit pseudo-périodique.On suppose cette condition réalisée. Exprimer θ(t) . On posera $\tau=\frac{2m}{\lambda}$ et Ω la pseudo-pulsation .
8- L'allure de la courbe représentative des variations de la fonction θ(t) est la suivante:



On appelle décrément logarithmique la grandeur sans dimension $\delta=\ln(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)})$ où T désigne la pseudo-période. Exprimer λ en fonction de δ, m et T. Par lecture graphique, déterminer les valeurs de T et δ. En déduire celle de λ sachant que m = 100 g.

Exercice 3 :pendule électrique
Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil inextensible de masse négligeable.
La boule est préalablement chargée avec une charge électrique $Q=2{,}3.10^{-4}\,C$. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme $\vec{E}=E\,\vec{u}_x$ avec $E=500\,V.m^{-1}$.
La longueur du pendule est OM = R = 10 cm et la masse de la boule est assimilée à un point M est m= 20g. L'accélération de la pesanteur est g = 9,8m.s^{-2} .

1- Appliquer la loi du moment cinétique à M et en déduire la position d'équilibre θ_e du pendule.
2- On écarte le pendule légèrement de sa position d'équilibre. Déterminer la période To des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre .



Exercice 4:saut à l'élastique
Un homme de masse m = 80 kg saute à l'élastique d'un pont d'une hauteur H = 112 m . Il est retenu par un élastique assimilé à un ressort de raideur k = 1000 N.m^{-1} et de longueur à vide $l_0 = 80\,m$.
Il quitte le pont avec une vitesse négligeable . Les frottements ne sont pas pris en compte et le poids s'écrit $\vec{P} = m\,g\,\vec{u_x}$ avec g = 9,81 m.s^{-2} .
1- Déterminer, à l'aide d'une étude énergétique, la vitesse atteinte par la personne lorsque l'élastique commence à se tendre .
2- Déterminer la longueur de l'élastique à l'équilibre lorsque la personne est suspendue dans le vide . A ce stade que dire de la sécurité du saut ?
3- Déterminer, à l'aide d'une étude énergétique, la longueur maximale de l'élastique . Conclusion .

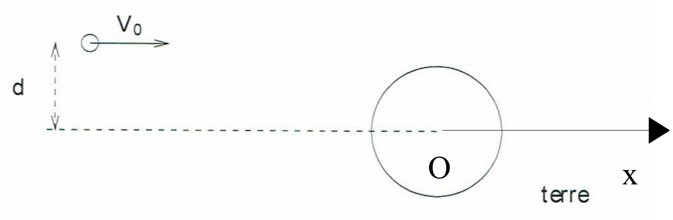
Exercice 5:la lune
La lune de masse m_L , de centre L est un des satellites naturel de la terre de masse m_T , de centre T. On ne considérera que la force d'attraction exercée par la terre sur la lune .
1- Montrer que le mouvement de la lune est plan .
On repère la lune par ses coordonnées polaires r désignant la distance de T à L et θ désigne l'angle que fait le rayon vecteur $\vec{TL}$ avec l'axe (Tx) . Montrer que la grandeur $C = r\dfrac{d\theta}{dt}$ est une constante . Comment s'appelle cette grandeur ? Définir la vitesse aérolaire, quelle est sa particularité ?
2- On admet que le mouvement de la lune autour de la terre est circulaire de rayon r_{TL} , démontrer qu'il est forcément uniforme . Déterminer la vitesse de la lune sur sa trajectoire en fonction de $G, m_T et\, r_{TL}$.
En déduire la relation liant la période T de révolution de la lune et r_{TL} .
3- Quelle est la période de révolution de la lune autour de la terre ? En déduire la distance terre lune .
4- Déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la lune .
Données :
Constante universelle de gravitation: $G = 6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$
masse de la terre : $m_T = 5{,}97.10^{24}\,kg$

Exercice 6:mise en orbite d'un satellite géostationnaire .
Un satellite géostationnaire est mis en orbite autour de la terre en deux temps : il passe d'abord par une orbite circulaire basse , puis est envoyé sur l'orbite circulaire géostationnaire via une orbite elliptique dite de transfert . Le périgée de l 'orbite de transfert coïncide avec l'endroit où les moteurs sont mis en marche sur l'orbite basse afin de passer sur l'orbite de transfert, et son apogée coïncide avec l'endroit où les moteurs sont mis en marche afin de se placer sur l'orbite géostationnaire .
1- Faire un schéma détaillé des différentes trajectoires du satellite .
2- Etablir l'expression et calculer la vitesse v_1 du satellite sur son orbite basse . Comment s'appelle cette vitesse ?
3- Etablir l'expression puis calculer la vitesse v_2 de la vitesse maximale à communiquer au satellite afin qu'il reste lié à la terre . Comme s'appelle cette vitesse ?
4- Retrouver la valeur de l'altitude h_{gs} de l'orbite géostationnaire .
5- Calculer la valeur du demi-grand a de l'orbite elliptique .
6- Quelle est la durée du mouvement du satellite sur l'orbite de transfert ?
7- Déterminer les valeurs des vitesses du satellite au périgée et à l'apogée de l'orbite de transfert .

Données :
Constante universelle de gravitation: $G = 6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$
masse de la terre : $m_T = 5{,}97.10^{24}\,kg$
rayon de la terre $R_T = 6{,}4.10^{6}\,m$

Exercice 7:météorite
Une météorite de masse m décrit une trajectoire rectiligne à la vitesse constante vo loin de la terre , cette trajectoire est distante de $d = 100.10^3\,km$ du centre de la terre . Le rayon de cette dernière est noté R et vaut R = 6400 km . Sa masse est notée Mt . Pénétrant dans le champ de gravitation terrestre, il décrit une orbite hyperbolique dont le centre de la terre est un des foyers. On note $g_0 = 10\,m.s^{-2}$ le champ de pesanteur à la surface de la terre . Les frottements dans l'atmosphère seront négligés .

1- Justifier que l'énergie mécanique de la météorite est une constante du mouvement et déterminer sa valeur en fonction d'une partie des données .
2- Justifier que le moment cinétique de la météorite, calculé au centre O de la terre, est une constante du mouvement et déterminer sa valeur en fonction d'une partie des données .
3- On se place en coordonnées polaires d'axe (Ox) , déterminer la relation liant la distance minimale r_{min} d'approche et les données du problème .
4- Déterminer la valeur limite de vo pour que la météorite ne percute pas la terre .



La figure ne respecte pas les échelles .