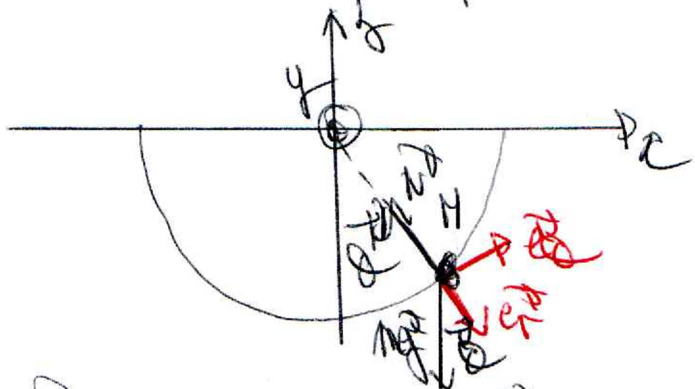
Ex2 : Mouvement pendulaire amorti.



Syst : pt M

Référentiel (R) du laboratoire supposé galiléen.

1- Forces : poids $m\vec{g} = mg\cos\theta \vec{e_r} - mg\sin\theta \vec{e_\theta}$

réaction $\vec{N} = -N\vec{e_r}$

2- PFD dans (R) :

$\vec{v}(M) = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{a}(M) = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$

$m\vec{a}(M) = m\vec{g} + \vec{N}$

Sur $\vec{e_r}$: $-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N$ (1)

Sur $\vec{e_\theta}$: $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$ (2)

(2) ⇒ $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$ mvt oscillatoire.

3- (1) ⇒ $N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$.

Pour déterminer $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ, on peut reprendre l'eq (2) que l'on multiplie par $\dot{\theta}$.

⇒ $R\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g\sin\theta\dot{\theta}$

$\frac{R}{2} d\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = d(g\cos\theta)$

En intégrant entre t=0 et t quelconque on a :

$$R\left(\dot{\theta}^2(t) - \dot{\theta}^2(t=0)\right) = 2g\left(\cos\theta - \cos(\theta(0))\right)$$

$\theta(0) = 0 \qquad \vec{v}(t=0) = v_0 \vec{e}_x = R\dot{\theta}(0)\vec{e}_x$

$$\Rightarrow R\left(\dot{\theta}^2(t) - \frac{v_0^2}{R^2}\right) = 2g(\cos\theta - 1)$$

$$R\dot{\theta}^2(t) = \frac{v_0^2}{R} + 2g(\cos\theta - 1)$$

D'où $N = mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{R} + 2mg(\cos\theta - 1)$

$$\boxed{N = 3mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{R} - 2mg}$$

4 - $\rightarrow E_{pp} = mg z_M + \text{cste} = -mgR\cos\theta + \text{cste}$

$E_{pp}(\theta = 0) = 0 = mgR + \text{cste}$

D'où $\boxed{E_{pp}(\theta) = mgR(1 - \cos\theta)}$

→ Le poids est conservatif et $\vec{N}$ ne travaille pas ⇒ l'énergie mécanique de M est constante.

$$E_m(t=0) = \frac{1}{2}m v_0^2 = E_m(t) = \frac{1}{2}m v^2 + mgR(1-\cos\theta)$$

lorsque $\theta = \theta_0$ alors $v = 0$ d'où θ_0 t.q

$$gR(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}v_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta_0 = 1 - \frac{v_0^2}{2Rg}}$$

θ_0 existe si $\cos\theta_0 < 1$

$\underline{v_0 < \sqrt{2Rg}}$

5_ Si $\theta \ll 1$ rad, l'éq. du mouvement de la Q2 devient $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$.

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)$$

$$\theta(t=0) = 0 = A$$

$$\dot{\theta}(t=0) = \frac{v_0}{R} = \sqrt{\frac{g}{R}}\,B \Rightarrow \frac{v_0}{\sqrt{gR}}$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)}$$

6- Aux forces de la Q1 s'ajoute la force de frottement fluide $-\lambda\vec{v} = -\lambda R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$$m\vec{a}(M) = m\vec{g} - \vec{N} - \lambda\vec{v}$$

Projection sur $\vec{e}_\theta$

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \lambda R\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

Pour $\theta \ll 1$ rad : $\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$

On pose $\boxed{\tau = \frac{2m}{\lambda}} \Rightarrow \frac{\lambda}{m} = \frac{2}{\tau}$ et $\boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{R}}$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

7- Éq caractéristique : $r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \frac{4}{\tau^2} - 4\omega_0^2$$

Régime pseudo-périodique si $\Delta < 0$

ie $\tau > \frac{1}{\omega_0} \Rightarrow \frac{2m}{\lambda} > \frac{1}{\omega_0} \Rightarrow \underline{\lambda < 2m\omega_0}$

Les solutions de l'éq. caractéristique sont dans ce cas :

$r_i = -\frac{1}{\tau} \pm i\Omega$ avec $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$

$\theta(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$

$t=0 \quad \theta = 0 = A$

$\dot{\theta}(t=0) = \frac{v_0}{l} = B\Omega \Rightarrow B = \frac{v_0}{l\Omega}$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{l\Omega} e^{-t/\tau} \sin(\Omega t)}$$

8 - T étant la pseudo-période des oscillations

$\theta(t+T) = \frac{v_0}{l\Omega} e^{-\frac{(t+T)}{\tau}} \sin(\Omega t) = e^{-\frac{T}{\tau}}\theta(t)$

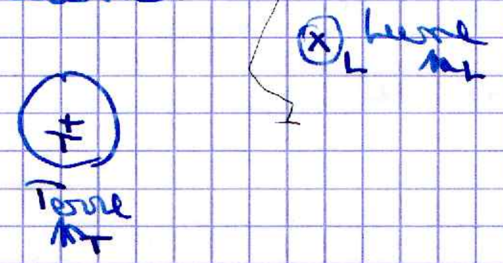
$\delta = \ln\left(e^{+\frac{T}{\tau}}\right) = \frac{T}{\tau} = \frac{\lambda T}{2m}$

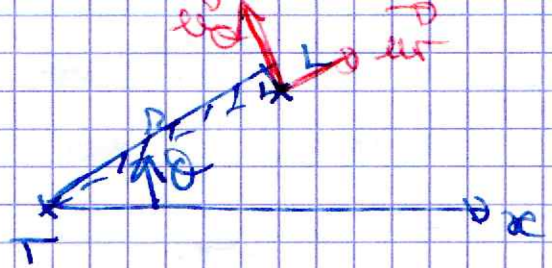
D'où $\boxed{\lambda = \frac{2m\delta}{T}}$

$\left.\begin{array}{l} T = 4\,ms . \\ \delta = \ln\left(\frac{0,2}{0,1}\right) = \ln(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \times 10^{-1} \times \ln(2)}{5 \cdot 10^{-3}}$

$\underline{\lambda = 35\ kg.s^{-1}}$

Ex 5 La lune.





1 - Th. du moment cinétique au point T appliqué à la lune

$$\vec{F}_{T\to L} = -\frac{G\, m_T\, m_L}{r^2}\,\vec{u_r}$$

$$\frac{d\vec{L_T}}{dt} = \vec{TL} \wedge \vec{F}_{T\to L} = \vec{0}.$$

$$\vec{L_T} = \vec{cst} = m_L r\, \vec{u_r} \wedge (\dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta})$$

$$\vec{L_T} = m_L r^2 \dot{\theta}\, \vec{u_z} = \vec{cst}$$

$\boxed{r^2\dot{\theta} = C}$ constante des aires.

dA l'aire balayée par le rayon vecteur pendant dt. $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

$\boxed{v = \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}}$ vitesse aréolaire.

2 - * $\vec{L_T} = \vec{cst}$

$\vec{TL}$ et $\vec{v_L}$ restent au cours du mvt ds un plan $\perp$ au vecteur $\vec{L_T}$ qui est un vecteur constant.

3 - * Mvt circulaire, r = cste comme

$r^2\dot{\theta} = C \Rightarrow \dot{\theta}$ = cste = le mvt est donc uniforme.

$\vec{v_L} = r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} = v\,\vec{u_\theta}$ avec v = cste

3) 3ème loi de Kepler.
TRC à la lune.

* $\vec{a} = -\frac{v^2}{r_{TL}} \cdot \vec{u_r}$

$-m_L \frac{v^2}{r_{TL}} = -\frac{G m_L m_T}{r_{TL}^2}$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G m_T}{r_{TL}}}}$$

* $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{r_{TL}^{3/2}}{\sqrt{G m_T}}$

$$\boxed{\frac{r_{TL}^3}{T^2} = \frac{G m_T}{4\pi^2}}$$

4) $T = 28$ jours

$r_{TL} = \left(\frac{G m_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$ $m_T = 5,97.10^{24}$ kg

$\underline{r_{TL} = 3,9.10^5 \text{ km}}$.

(dist terre - soleil
$1,5.10^{11}$ m.
$M_S \simeq 2.10^{30}$ kg

5) $E_m = E_c + E_p$

$E_p = -G \frac{m_T m_L}{r_{TL}}$ $E_c = \frac{1}{2} m_L v^2$

$E_m = \frac{1}{2} m_L \times \frac{G m_T}{r_{TL}} - G \frac{m_T m_L}{r_{TL}}$

$$\boxed{E_m = -\frac{G m_T m_L}{2 r_{TL}}}$$