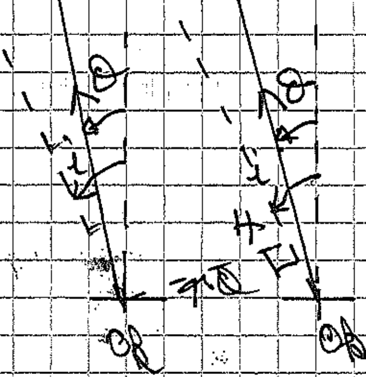
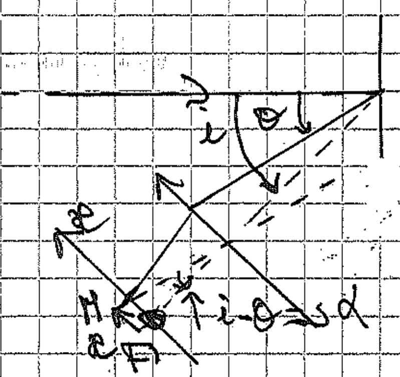
①

Ex: pouvoir de résolution d'un réseau

1- représentant le schéma pour une direction de diffraction θ / à la normale au réseau et correspondant à des rayons se superposant en un point d'abscisse x / O pour l'écran





La différence de marche δ entre 2 vibrations diffractées par 2 traits consécutifs vaut $\delta = a \sin\theta$

c'est à dire $\delta = a \sin(i - \alpha)$

avec $\tan\alpha \simeq \alpha = \frac{x}{f}$

②

$\delta = a \sin\left(i - \frac{x}{f}\right)$

Soit $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ la différence de phase entre les vibrations diffractées par 2 traits consécutifs.

Soit $s_1(M,t) = s_0$ la vibration diffractée par le 1er trait

$s_2(M,t) = s_0 e^{-j\varphi}$

$s_N(M,t) = s_0 e^{-j(N-1)\varphi}$

La vibration résultante en M s'écrit:

$s(M,t) = s_1(M,t)\left(1 + e^{-j\varphi} + \dots + e^{-j(N-1)\varphi}\right)$

$s(M,t) = s_0 \frac{1-e^{-jN\varphi}}{1-e^{-j\varphi}} = s_0 e^{-j\frac{(N-1)\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$

D'où $E(x) = K\,|s(M,t)|^2$

$$\boxed{E(x) = E_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi N a}{\lambda} \sin\left(i - \frac{x}{f}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\left(i - \frac{x}{f}\right)\right)}}$$

2 – $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$

Maxi d'ordre k est t.q.

$\varphi = 2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta_k)$

$\sin(\theta_k) = \sin(i - \alpha_k) = \frac{k\lambda}{a} = 0{,}2454\,k$

→ Nombre maxi d'ordres observables est t.q.

$-1 \le \sin\theta_k \le 1$

$-4{,}1 \le k \le +4{,}1$ 9 ordres observables en comptant l'ordre 0.

Cependant, au vu de la position de l'écran, on ne pourra observer que les ordres positifs ($\theta > 0$) soit 5 ordres $k = 0$; $k = 1$; $k = 2$; $k = 3$; $k = 4$.

$\theta_0 = 0$ $\theta_1 = 0{,}25$ rad soit $14{,}2^\circ$

$\theta_2 = 0{,}51$ rad soit $29{,}4^\circ$

$\theta_3 = 0{,}83$ rad soit $47{,}4^\circ$

$\theta_4 = 1{,}37$ rad soit $79{,}0^\circ$

L'ordre 2 est à $0{,}6^\circ$ de l'axe optique de la lentille c'est à dire à $x_2 \simeq 0{,}5 \times \frac{0{,}6}{180} \times \pi$

$x_2 = 5{,}2$ mm.

L'ordre 2 est à 5,2 mm de F'

3 – $E = 0$ lorsque $\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0$ avec $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0$ c'est à dire pour $\frac{N\varphi}{2} = p\pi \Rightarrow \varphi = \frac{2p\pi}{N}$ avec $p \neq kN$

Autour du maximum d'ordre k, $E = 0$ pour $\varphi = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{N}$

3

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{N}$$

$$\sin\theta = \frac{k\lambda}{a} \pm \frac{\lambda}{Na}$$

La demi-largeur est $\Delta(\sin\theta) = \frac{\lambda}{Na}$

Soit θ'_k t-q $\sin\theta'_k = \frac{k\lambda}{a} + \frac{\lambda}{Na}$

θ_k t-q $\sin\theta_k = \frac{k\lambda}{a}$

$\theta'_k = \theta_k + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$

$$\sin(\theta'_k) = \sin(\theta_k + \varepsilon) = \sin(\theta_k)\cos(\varepsilon) + \cos(\theta_k)\sin(\varepsilon)$$

$$\sin(\theta'_k) = \sin(\theta_k) + \varepsilon\cos\theta_k$$

$$\sin(\theta'_k) - \sin(\theta_k) = \varepsilon\cos(\theta_k) = \frac{\lambda}{Na}$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{Na\cos(\theta_k)}$$

Avec $\cos(\theta_k) = \sqrt{1-\sin^2\theta_k} = \sqrt{1-\frac{k^2\lambda^2}{a^2}}$

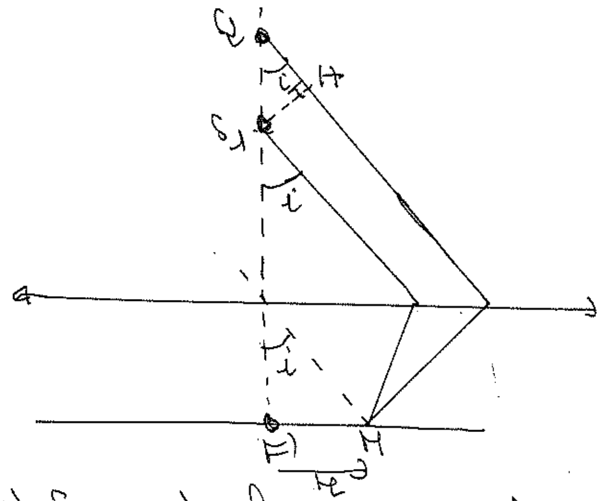
$$\boxed{\varepsilon = \frac{\lambda}{Na\sqrt{1-\frac{k^2\lambda^2}{a^2}}}}$$

DM interféromètre de Michelson.

I - 1 - Lorsque $OA_1 = OA_2$, $\delta = 0$ en tout point de l'écran, on observe un éclairement uniforme.
On se trouve au contact optique.

2 - a - Nous sommes en configuration lame d'air. Les franges sont des anneaux localisés à l'infini.
Pour les observer sur un écran, il faut placer ce dernier dans le plan focal image de la lentille de projection.

b - L'interféromètre est équivalent à 2 sources secondaires S_1 et S_2 distantes de $2e$ et placées sur l'axe (Oy).



S_1 et S_2 sont les images d'un point de la source à travers (S_0) et (M_1) et (M_2).
D'après le th. de Malus et le principe du retour inverse de la lumière

$\delta(M) = \ell(S_2H) = \ell S_2H = 2e\cos i$

c - $p(M) = \frac{2e\cos i}{\lambda}$

au centre $i = 0$ $\quad p_0 = \frac{2e}{\lambda}$

AN : $p_0 = 4028,6$

$p \downarrow$ lorsque i augmente, l'ordre d'interférence du 1er anneau brillant vaut $p_1 = 4028$, le 3ème a un ordre d'interférence égal à 4026 -

$p_3 = \frac{2e}{\lambda}\cos i_3 \simeq \frac{2e}{\lambda}\left(1 - \frac{i_3^2}{2}\right)$

Le rayon angulaire du 3ème anneau brillant a pour expression.

$i_3 = \sqrt{2 - \frac{p_3\lambda}{e}}$

$$\boxed{r_3 = f'\tan i_3 \simeq f' i_3 = f'\sqrt{2 - \frac{p_3\lambda}{e}}}$$

AN : $r_3 = 3,57$ cm.

3 - $p = \frac{2e}{\lambda}\cos i$

Pour p donné, lorsque e augmente, $\cos i$ diminue donc i augmente, les anneaux semblent sortir du centre de la figure.

4 - La nouvelle différence de marche $(2-1)$ vaut : $\delta(i) = 2e\cos i - 2(n-1)e'$

$p(i) = \frac{2e}{\lambda}\cos i - \frac{2(n-1)e'}{\lambda}$

$$p'(0) - p(0) = -\frac{2(n-1)e^2}{\lambda} \simeq -18,18$$

18 anneaux brillants ont défilé au centre.

3- au centre : $p(0) = \frac{2e}{\lambda_0}$ entier.

lorsque $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ $\quad p'(0) = \frac{2e}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$

N = partie entière de $|p'(0) - p(0)|$

$$N = E\left(\frac{2e}{\lambda_0} - \frac{2e}{\lambda_0+\Delta\lambda}\right) = E\left(\frac{2e\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0+\Delta\lambda)}\right)$$

b- $\lambda_0 = 775$ nm

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \qquad d\lambda = -\frac{c}{\nu^2}d\nu = -\frac{\lambda^2}{c}d\nu$$

λ augmente de $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu$

AN : $\Delta\lambda = 2 \cdot 10^{-10}$ m

$\Delta\lambda = 0,2$ nm

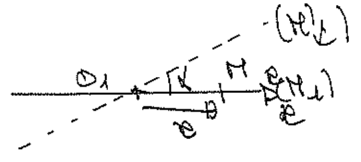
c- $|p(0) - p'(0)| = 32,2$

32 franges brillantes défilent en F'

II 1- Il faut placer une source dans le plan focal objet d'une lentille convergente.

2- les franges sont localisées sur le coin d'air, pour les observer, on place l'écran dans le plan conjugué du coin d'air à travers la lentille.

3-



La différence de marche en M est égale à $2e(M)$, $e(M)$ = épaisseur du coin d'air en M.

$\delta(M) \simeq 2\alpha x$

$p(M) = \frac{2\alpha x}{\lambda}$

L'éclairement en M vaut : $E(M) = E_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi 2\alpha x}{\lambda}\right)\right)$

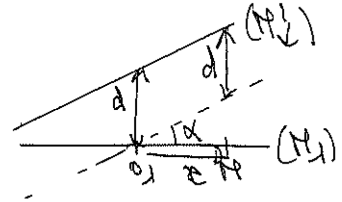
On obtient des franges rectilignes d'interfrange $i_m = \frac{\lambda}{2\alpha}$ sur le miroir.

Sur l'écran $i_e = |\gamma| \frac{\lambda}{2\alpha}$

A.N $\quad i_e = 4 \times \frac{546,1 \cdot 10^{-9} \times 180 \times 60}{2 \times 1 \times \pi}$

$i_e = 3,7$ mm.

4-



$e'(M) = \alpha x + d$

$\delta'(M) = 2\alpha x + 2d$

$p'(M) = \frac{2\alpha x}{\lambda} + \frac{2d}{\lambda}$

L'ordre d'interférence nul se trouve en x_0 tq

* pour $d = 0$, $\quad x_0 = 0$
* pour $d \neq 0$, $\quad x_0 = -\frac{d}{\alpha}$

Sur le miroir les franges se déplacent dans le sens des x décroissants de $\frac{d}{\alpha}$

Sur l'écran, comme $\gamma < 0$, les franges (2) se déplacent dans le sens de x croissant de $|\gamma| \frac{d}{\alpha}$

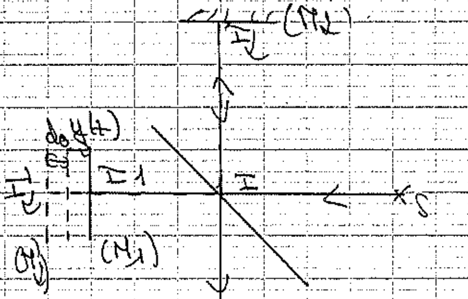
A.N $|\gamma| \frac{d}{\alpha} = 4 \times \frac{10^{-3} \times 180 \times 60}{\pi} = 1{,}37$ cm.

Extrait centrale MP 2016

Surveillance sismique d'un site nucléaire

1- La différence de marche vers le photodétecteur vaut $\delta(t) = 2(d_0 + y(t)) = 2d_0 + 2y(t)$

En effet deux rayons qui interfèrent au niveau du photodétecteur proviennent d'un rayon incident parallèle à (Ox), incidence nulle.



La différence de marche vaut $\delta = 2II_2 - 2II_1$

$\delta = 2\,II_2 - 2\,II_1 = 2(d_0 + y(t))$

$= 2\,I_1I_2$

2- D'après la formule de Fresnel

$I(t) = 2I_0(1 + \cos(\Phi(t)))$.

$I_{max} = 4I_0 \qquad I(t) = \frac{I_{max}}{2}\left(1 + \cos(\Phi(t))\right)$

avec $\Phi(t) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(t)$

$$\boxed{\Phi(t) = \frac{4\pi}{\lambda}d_0 + \frac{4\pi}{\lambda}y(t) = \Phi_0 + \frac{4\pi}{\lambda}y(t)}$$

Avec $\Phi_0 = \frac{4\pi}{\lambda}d_0$

3- $\frac{dI}{d\Phi} = -\frac{I_{max}}{2}\sin(\Phi)$

$\left|\frac{dI}{d\Phi}\right|$ maxi pour $|\sin\Phi|$ maxi $\Rightarrow \Phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pour des valeurs $\Phi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, la sensibilité maxi (logique au vu de la figure 10).

4 a- Si $y(t) = Y_M\cos(\omega t + \varphi_1)$ entre A et B, le miroir a effectué un aller complet correspondant à une valeur de y ayant varié entre $-Y_M$ et $+Y_M$ et donc s'est déplacé de $2Y_M$

$\Delta\delta = 4Y_M$

b- Un aller dure environ 0,1 s ce qui correspond à une demi période de la vibration d'où $\frac{1}{2f} = 0,1$ s

$f = \frac{1}{0,2} = 5$ Hz

c- Entre A et B, on compte P périodes de la fonction $\frac{I}{I_{max}}$, sur chaque période δ varie de λ, d'où $\Delta\delta = P\lambda$

d- $Y_M = \frac{P\lambda}{4}$

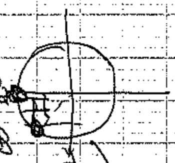
laser He-Ne $\lambda = 633$ nm $\qquad Y_M = 1,266\ \mu m$

a. Entre A et B, il y a 8,5 pseudo-période de $I(t)/I_{max}$ donc $4x_M = 8,5\lambda$

$x_M = \frac{8,5}{4}\lambda = 1,245$ µm

b. Entre A et le 1er maxi suivant (ou B et le mini précédent) $\frac{I}{I_{max}}$ varie de 0,25.

$\frac{I}{I_{max}} = 0$ $\quad \phi = (2k+1)\pi$

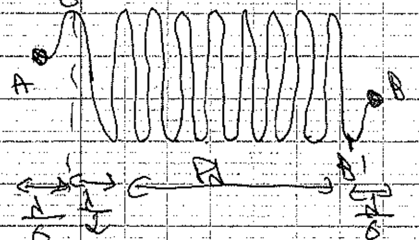


$\frac{I}{I_{max}} = 0,25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(1+\cos\phi)$

$\cos\phi = -\frac{1}{2}$

ϕ a varié de $\frac{\pi}{3}$

Qd ϕ varie de 2π, δ varie de λ donc entre le mini juste avant B et B, δ varie de $\frac{\lambda}{6}$, de même entre B' et B



Entre A et B, δ varie de $\Delta\delta = 8\lambda + \frac{\lambda}{2} + 2\times\frac{\lambda}{6}$

$\Delta\delta = 4x_M = 8\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{3} = \frac{(48+3+2)\lambda}{6} = \frac{53\lambda}{6}$

$x_M = \frac{53\lambda}{24} = 2,208\lambda \quad x_M = 1,298$ µm