Mines MP 2024 _ Physique I

Des objets astronomiques, de Mars à Sirius.

I Les lois de Kepler et l'unité astronomique :

IA _ Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur :

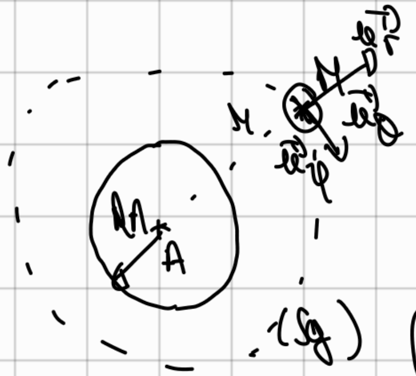
1 _ * On peut considérer que A est fixe si $m_A \gg m_P$

* $\boxed{\vec{F} = -\mathcal{G}\, m_A m_P \dfrac{\vec{AP}}{AP^3} = -\mathcal{G}\, m_A m_P \dfrac{\vec{r}}{r^3} = -\mathcal{G}\dfrac{m_A m_P}{r^2}\vec{u_r}}$

2 _ * $\vec{F} = m_P\, \vec{g}(P)$

$\vec{g}(P)$ = champ gravitationnel créé en P par A

*



Si la répartition de masse est à symétrie sphérique les plans $(M; \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M; \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ sont plans de symétrie de celle-ci.

De plus, la distribution étant invariante par rotation autour de O $\Rightarrow$ $\vec{g}(P) = g(r)\,\vec{u_r}$.

Appliquons le th. de Gauss à une sphère de centre O, de rayon $r > R_A$.

$\oiint_{(S_g)} \vec{g}(r)\, dS\, \vec{u_r} = g(r)\, 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G}\, M_{int}$

$M_{int} = m_A$ = masse à l'intérieur de (S_g).

D'où $\vec{g} = -\mathcal{G}\dfrac{m_A}{r^2}\vec{u_r}$

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_A m_P}{r^2}\vec{u_r}}$$ reste inchangée.

3- Si P n'est plus ponctuelle :

$$\vec{F} = -G m_A \iiint_{M\in(P)} \frac{\delta m(M)\,\vec{AM}}{AM^3}$$

4- Appliquons, au point A, le th. du moment cinétique calculé en A :

$$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = \vec{AP}\wedge\vec{F} = \vec{0} \text{ car } \vec{AP} \text{ et } \vec{F} \text{ colinéaires}$$

$\Rightarrow$ le vecteur $\vec{L_A}$ est donc un vecteur constant

Or $\vec{L_A} = \vec{AP}\wedge m_p\vec{v} = \vec{cst}$ $\quad \vec{v} = \vec{v}_{/(R_0)}(P)$

$\Rightarrow$ $\vec{AP}$ et $\vec{v}$ sont, à tout instant, contenu dans un plan $\perp$ à $\vec{L_A}$

$$\vec{AP} = r\vec{u_r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{L_A} = m_p r\vec{u_r}\wedge(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}) = m_p r^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$$

$$\vec{L_A} = m_p r^2\dot{\theta}\,\vec{u_z} = m_p C\vec{u_z} \Rightarrow \boxed{C = r^2\dot{\theta}}$$

5- $$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{d\vec{v}}{dt}\times\frac{dt}{d\theta} = \frac{\vec{F}}{m_p}\times\frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{G m_A}{r^2\dot{\theta}}\vec{u_r}$$

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\frac{G m_A}{C}\vec{u_r} \quad \text{or} \quad -\vec{u_r} = \frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{d\theta} = +\frac{G m_A}{C}\frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta}$$

D'où, en intégrant par rapport à θ, on obtient :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathcal{G} m_A}{C}\left(\vec{u}_\theta + \vec{e}\right) = \frac{C}{p}\left(\vec{u}_\theta + \vec{e}\right)}$$

Avec $\vec{e}$ cste d'intégration et $\boxed{p = \frac{C^2}{\mathcal{G} m_A}}$

$\|\vec{u}_\theta\|$ sans dimension d'où $\|\vec{e}\|$ sans dimension

$\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$ étant dans le plan (A, x, y), $\vec{e}$ est également dans ce plan.

6- $\vec{e} = e\,\vec{u}_y$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = \frac{C}{p}\left(\vec{u}_\theta + e\sin\theta\,\vec{u}_r + e\cos\theta\,\vec{u}_\theta\right)$$

D'où
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{Ce}{p}\sin\theta \\ r\dot{\theta} &= \frac{C}{p}\left(1 + e\cos\theta\right) \end{aligned}}$$

Or $r^2\dot{\theta} = C \Rightarrow r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = \frac{C}{p}\left(1 + e\cos\theta\right)$

D'où $\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}}$

Si $e \geq 1$, il existe des valeurs de θ t.q $1 + e\cos\theta = 0$, pour ces valeurs $r \to \infty$
$\Rightarrow$ le mvt n'est pas borné.

Si $e < 1$, $1 + e\cos\theta > 0 \Rightarrow r$ reste borné

$$\frac{p}{1+e} < r < r_{max} = \frac{p}{1-e}$$

On obtient une trajectoire elliptique pour $e<1$ et circulaire pour $e=0$.

I8 – Période du mouvement :

7– $C = r^2\dot{\theta} = \frac{p^2}{(1+e\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{dt}$

D'où $dt = \frac{p^2}{C}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$

Pendant une période, θ varie entre 0 et 2π d'où :

$$T = \frac{p^2}{C}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

Or $p = \frac{C^2}{Gm_A} \Rightarrow C = p^{1/2}\sqrt{Gm_A}$

D'où $$\boxed{T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}}$$

8– Pour $e=0$, $r = p = cste$ on obtient donc une trajectoire circulaire.

$$T = \frac{p^{3/2}2\pi}{\sqrt{Gm_A}} \qquad p = R \text{ rayon de la trajectoire}$$

D'où $T = \frac{R^{3/2}2\pi}{\sqrt{Gm_A}} \Rightarrow \boxed{\frac{R^3}{T^2} = \frac{Gm_A}{4\pi^2}}$

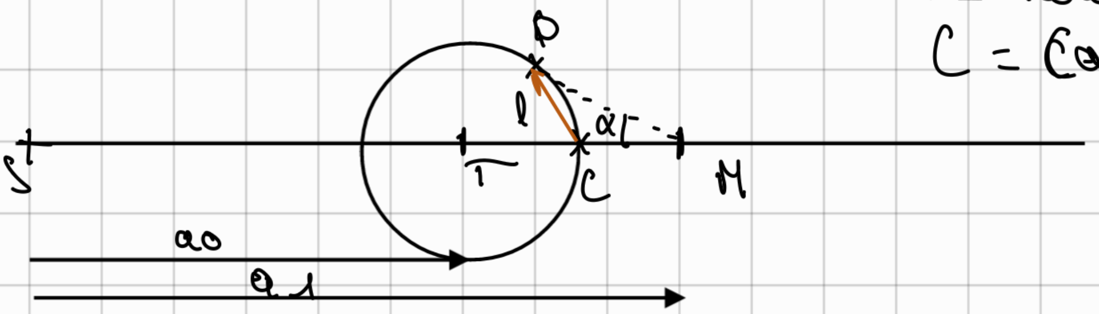
On retrouve la 3e loi de Kepler

Enoncé historique : le rapport du carré de la période de révolution sur le cube du demi-grand axe de l'ellipse est identique pour toutes les planètes du système solaire.

9 –
```
import numpy as np
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate

e = np.linspace(0, 0.5, 10)
T = [ ]
def fct(theta):
    return 1/(1+x*np.cos(theta))**2

for x in e
    y, err = scipy.integrate.quad(fct, 0, 2*np.pi)
    T.append(y)

plt.figure()
plt.plot(e, T, '-o')
plt.xlabel('paramètre e')
plt.ylabel('integrale I')
plt.title('Calcul numérique de l'intégrale I')

plt.show()
```

II – Mesure de l'unité astronomique :

P = Paris
C = Cayenne



11- α, l, πc très petits devant a_0 et a_1

d'où $\alpha \simeq \dfrac{l}{a_1 - a_0} \Rightarrow a_1 = a_0 + \dfrac{l}{\alpha}$

Or $\dfrac{a_1^3}{T_1^2} = \dfrac{a_0^3}{T_0^2} \Rightarrow a_0^3 = \left(\dfrac{T_0}{T_1}\right)^2 a_1^3$

$$\Rightarrow \boxed{a_0^3 = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2 \left(a_0 + \frac{l}{\alpha}\right)^3}$$

12- $\alpha = 14''$ soit $\alpha = \dfrac{14}{3600} \times \dfrac{\pi}{180} \simeq \dfrac{7}{1800} \times \dfrac{1}{60}$ rad

Calculons :

$$\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{2/3}\left(a_0 + \frac{l}{\alpha}\right) = \left(\frac{365}{687}\right)^{2/3}\left(1{,}5.10^{11} + \frac{707.10^4}{7} \times 1800 \times 60\right)$$

$$= \frac{1}{1{,}6}\left(1{,}5.10^{11} + 108.10^9\right) \simeq \frac{2{,}6}{1{,}6} 10^{11}$$

$\simeq 1{,}5.10^{11}$ m on retrouve bien la valeur de a_0.

II Energie gravitationnelle :

1) La force d'interaction gravitationnelle étant attractive le travail de celle-ci est positif lorsqu'on constitue l'étoile $\Rightarrow$ la variation d'énergie potentielle est < 0.

En prenant $E_p = 0$ à l'∞.

$$\underline{W_g} = -\int_\infty^M \vec{F_g} \cdot d\vec{OM} \;\; \underline{< 0}$$

$\vec{F_g}$: force d'interaction gravitationnelle.

$E_p = -W_g$ la force exercée par l'opérateur permet l'accrétion de la matière = analogue à l'énergie de liaison d'une molécule.

14 – $\boxed{\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}}$

$$\boxed{m = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 = M\left(\frac{r}{R}\right)^3}$$

$$\boxed{dm = \rho \times 4\pi r^2\, dr = 3M\frac{r^2}{R^3}dr}$$

15 – Lorsqu'on apporte la manière nécessaire à aire passer le rayon de r à $r+dr$

Si on apporte une masse dm depuis l'infini jusqu'à la distance r :

lorsque la masse dm est à la distance u de O, $d\vec{F_g} = -\frac{G m\, dm}{u^2}\vec{u_r}$

lorsque u varie de du $d^2W_g = -\frac{G m\, dm}{u^2}du$

Entre l'∞ et r : $dW_g = \int_{\infty}^{r} -\frac{G m\, dm}{u^2}du$

$$\boxed{dW_g = +G m\, dm\left(+\frac{1}{u}\right)_{\infty}^{r} = -\frac{G m}{r}dm}$$

dW_g = variation de l'en. pot de dm entre l'∞ et la distance r.

$$W_g = \int_{r=0}^{R} -\frac{G m\, dm}{r} = -\int_0^R \frac{G}{r} M\left(\frac{r}{R}\right)^3 \times 3M\frac{r^2}{R^3}dr$$

$$W_g = -3G\frac{M^2}{R^6}\int_0^R r^4\, dr = -\frac{3GM^2}{R^6}\left(\frac{R^5}{5}\right)$$

$$\boxed{W_g = -\frac{3}{5}\frac{G M^2}{R}}$$