DM SCIENCES PHYSIQUES N°10
Partie physique

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les notations des constantes fondamentales utiles, des données numériques et des rappels de syntaxe Python sont regroupés en fin d'énoncé.

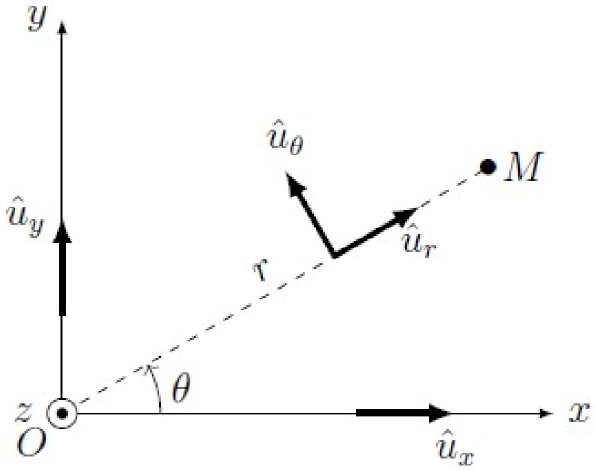

FIGURE 1 – Base locale associée aux coordonnées polaires

On posera $j^2 = -1$. On notera par un point les dérivées temporelles, $\dot{f} = \frac{df}{dt}$.

I- Les lois de Kepler et l'unité astronomique

Ce problème est consacré aux lois de Kepler (1609 et 1618) et à une mesure historique de l'unité astronomique par Cassini (1672). On notera que ces travaux sont tous deux nettement antérieurs à la publication de la loi de la gravitation universelle par Newton (1687).
On s'intéressera en particulier aux orbites de la Terre et de Mars, la planète la plus proche de la Terre avec une trajectoire extérieure. Le plan de sa trajectoire est presque confondu (à moins de 2° près) avec le plan de l'écliptique (la trajectoire terrestre). Ces deux trajectoires sont proches de cercles autour du Soleil.

I- A Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On étudie ici, relativement à un référentiel galiléen (R_0), le mouvement d'un astre $\mathcal{P}$ assimilé à un point P de masse m_P sous l'action du seul champ de gravitation exercé par un autre astre attracteur $\mathcal{A}$ de masse m_A et de centre fixe A. On notera $\vec{r} = \vec{AP}$, $r = \|\vec{r}\|$ et $\vec{r} = r\,\vec{u}_r$

1- Quelle condition (inégalité forte) permet de considérer A comme fixe ?
Quelle est l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{P}$ si les deux astres sont assimilés à des points ?

2- Que devient l'expression de $\vec{F}$ si $\mathcal{P}$ reste ponctuel tandis que l'astre $\mathcal{A}$, de rayon $R_A < r$,possède une répartition de masse à symétrie sphérique ? On justifiera sa réponse.

On pourra, dans tout ce qui suit, considérer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}$ comme des points matériels A et P.
3- Montrer que le mouvement de P est plan ; on notera (Axy) le plan de ce mouvement.
Définir la constante C issue de la loi des aires pour ce mouvement et relier cette constante aux coordonnées polaires (r, θ) du mouvement de P dans (Axy).

On note $\vec{v}$ la vitesse de P et $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ les vecteurs de la base polaire associée au mouvement de P.
$\vec{v}$ est fonction du temps et donc aussi de l'angle polaire θ.
4- Exprimer $\frac{d\vec{v}}{d\theta}$ et en déduire que $\vec{v}(\theta)=C\frac{\vec{u}_\theta+\vec{e}}{p}$ où $\vec{e}$ est une constante d'intégration et p un paramètre du mouvement qu'on exprimera en fonction de C, m_A et de la constante universelle de gravitation $\mathcal{G}$.
Montrer que le vecteur $\vec{e}$ est sans dimension et situé dans le plan (Axy) du mouvement.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{e}=e\,\vec{u}_y$ avec $e=\|\vec{e}\|$.
5- Exprimer $\dot{r}$ et $r\dot{\theta}$ en fonction de C, p, e et θ.
En déduire r en fonction de p, e et θ et montrer que e < 1 pour un mouvement borné.
Quelle est, dans ce cas et sans démonstration, la nature de la trajectoire ? On admettra que le mouvement est périodique de période T.

I-B Période du mouvement

6- En utilisant par exemple la question précédente, montrer que $T=\frac{I\,p^{3/2}}{\sqrt{G m_a}}$ où la constante I s'obtient par le calcul de l'intégrale $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos(\theta))^2}$ I

7- Dans le cas particulier où e = 0, préciser la nature de la trajectoire et l'expression de T ; en déduire une des lois de Kepler, préciser laquelle et proposer son énoncé « historique » sous forme d'une phrase en français.

Le calcul de l'intégrale I en fonction de e peut être mené de manière numérique (au moyen d'un script Python) ; les résultats sont illustrés figure 2.

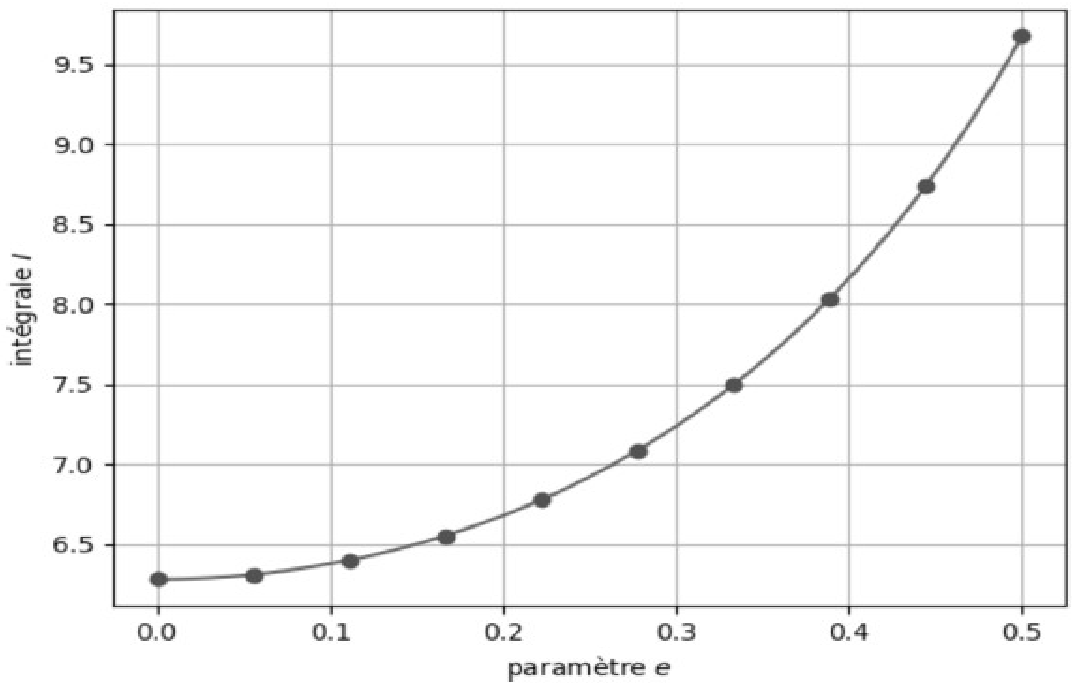

FIGURE 2 – Calcul numérique de l'intégrale $\mathcal{I}$

8- Proposer l'écriture des lignes de code Python permettant le tracé de la figure 2 : courbe en trait plein puis mise en exergue d'une dizaine de valeurs régulièrement réparties pour $0 \leq e \leq \frac{1}{2}$.

I-C Mesure de l'unité astronomique

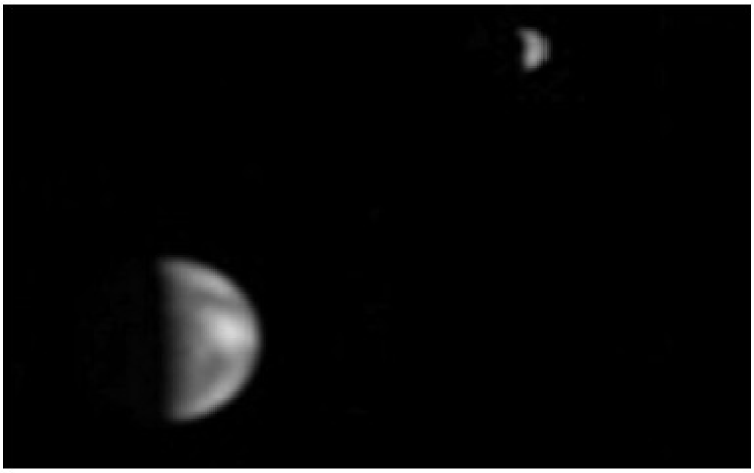

FIGURE 3 – La Terre et la Lune vues depuis Mars par la sonde *Mars Global Surveyor*, photo NASA

Nous admettrons pour la Terre et Mars des orbites circulaires centrées au centre S du référentiel de Copernic, de rayons respectifs a_0 (c'est l'unité astronomique) et a_1, de périodes T_0 et T_1.
Le principe de la mesure de a_0 proposée par Cassini, à la fin du XVII ème siècle, consistait à observer simultanément, depuis deux observatoires bien séparés (Paris et Cayenne, distants en ligne droite de ℓ = 7070km) la planète Mars lorsqu'elle est à sa distance minimale de la Terre, puis d'évaluer l'angle α entre les deux directions de visée (Paris → Mars et Cayenne → Mars).
9- Sans soucis d'échelle, représenter sur un schéma unique l'ensemble des paramètres géométriques a_0, a_1, ℓ et α ci-dessus au moment de la mesure, lors d'une conjonction inférieure (le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre).
10- En déduire la relation permettant de déterminer a_0 en fonction de T_0, T_1, ℓ et α .
11- La valeur annoncée par Cassini était $\alpha = 14''$ (secondes d'angle). Est-elle compatible avec la relation ci–dessus ?

II- Energie gravitationnelle :

Les étoiles à l'équilibre seront ici décrites comme des boules homogènes de masse M et de rayon R en équilibre sous l'action de leur propre gravitation et de diverses forces antagonistes qui s'opposent à l'effondrement de l'étoile : il s'agit de la pression thermodynamique associée à l'agitation thermique dans et d'une propriété strictement quantique, la pression de confinement.

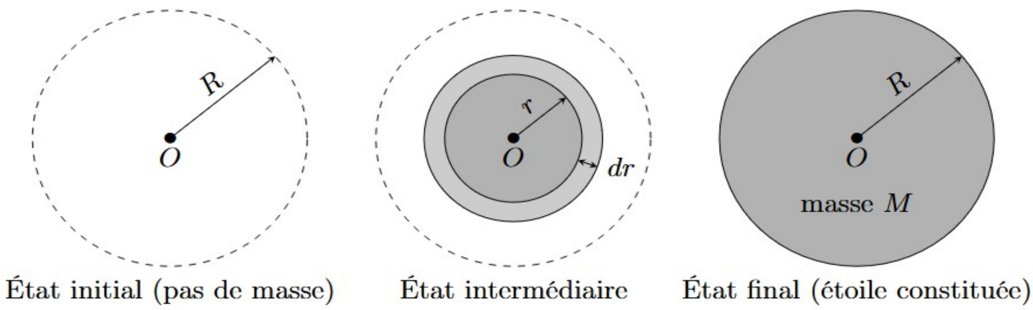

FIGURE 4 – Constitution progressive de l'étoile

Du fait de la symétrie sphérique de l'étoile, on va définir son énergie gravitationnelle W_g comme l'énergie mécanique qu'un opérateur fournit à l'étoile pour la constituer, à partir de gaz sans interaction car pris à grande distance, en couches concentriques de rayon croissant (figure 4).
Ce calcul sera effectué pour une évolution quasi–statique, l'opérateur agissant à tout instant pour compenser exactement les forces gravitationnelles.

12- Donner et justifier physiquement le signe de W_g. Expliquer pourquoi on nomme parfois $E_\ell = - W_g$ l'énergie de liaison de l'étoile.
13-Exprimer la masse volumique ρ, supposée uniforme et constante, de l'étoile en fonction de M et R. En déduire, en fonction de M , R et r, les expressions de m (masse déjà constituée dans une sphère de rayon r) et de dm (masse à apporter pour faire passer ce rayon de r à r + dr).
14- Justifier que la contribution dW_g à l'énergie gravitationnelle de cet accroissement (passage de r à r+dr) s'écrit $dW_g = -G\dfrac{m\,dm}{r}$.

Calculer l'énergie gravitationnelle totale W_g de l'étoile en fonction de G, M et R.

Données numériques

Grandeur	Symbole, valeur et unité
Constante de Planck	$h = 6{,}63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}Hz^{-1}}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
Distance Terre–Soleil (unité astronomique)	$a_0 = 1\,\mathrm{UA} = 1{,}50\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Masse du proton	$m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 1{,}99\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Rayon du Soleil	$R_\odot = 6{,}96\cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6{,}37\cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365\,\mathrm{j} = 3{,}16\cdot 10^{7}\,\mathrm{s}$
Période du mouvement de Mars	$T_1 = 687\,\mathrm{j}$
Seconde d'arc	$1'' = 4{,}85\,\mu\mathrm{rad}$

On donne $\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 \simeq 1{,}6$ et $\left[\dfrac{687}{365}\right]^{1/3} \simeq \dfrac{5}{4}$.

Syntaxes Python

Syntaxe d'appel	**Résultats ou commentaires**
⋆ **Générer un tableau de n valeurs régulièrement sur $[a\,,\,b]$:**	
`r = numpy.linspace(a, b, n)`	`r` est un tableau de type `numpy.array`
⋆ **Évalue l'intégrale $y = \int_a^b f(x)dx$ et estime l'erreur numérique**	
`r = scipy.integrate.quad(f, a, b)`	`r = (y, err)`
⋆ **Créer ou activer une fenêtre de tracé :**	
`r = matplotlib.pyplot.figure()`	exécuter *avant* de générer des tracés
⋆ **Tracer la courbe représentative de $y = f(x)$**	
`matplotlib.pyplot.plot(x, y)`	`x` et `y`, énumérables de même dimension
⋆ **Afficher la ou les fenêtres de tracé :**	
`matplotlib.pyplot.show()`	exécuter *après* avoir généré des tracés