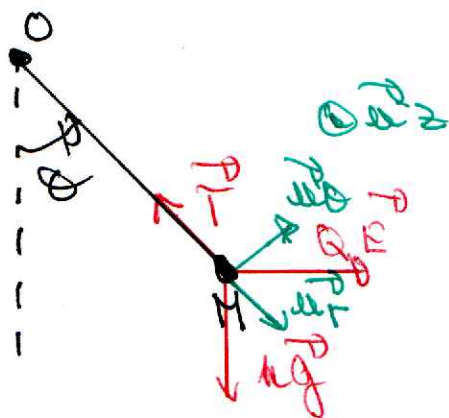


Ex3: Pendule électrique

1 -



On étudie le point M dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Celui-ci est soumis :

- au poids mg
- à la force électrique QE
- à la tension du fil.

On applique le TMC en O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(mg) + \vec{M}_O(QE) + \vec{M}_O(T)$$

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}(M)$$

$$\text{or } \vec{v}(M) = l\dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{OM} = l \vec{u}_r$$

$$\text{D'où } \vec{L}_O = ml^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

$$\vec{M}_O(T) = \vec{OM} \wedge T = 0$$

$$\vec{M}_O(mg) = \vec{OM} \wedge mg = \vec{OM} \wedge mg(\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{M}_O(mg) = -mg l \sin\theta \vec{u}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(QE) &= \vec{OM} \wedge QE = Q l E \vec{u}_r \wedge (\sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_\theta) \\ &= Q l E \cos\theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

D'où $m \ddot{\theta} = -mg \sin \theta + QE \cos \theta$ (E)

A l'eq $\ddot{\theta} = 0$

$\theta = \theta_e$ t.q $-mg \sin \theta_e + QE \cos \theta_e = 0$

$\tan \theta_e = \frac{QE}{mg}$ A.N $\theta_e = 30^\circ$

2- θ_e n'étant pas petit, on fait le changement de variable $\theta = \theta_e + \epsilon$ avec ϵ petit.

En réinjectant l'expression de θ dans l'équation (E), on obtient

$\ddot{\epsilon} + \frac{g}{L} \sin(\theta_e + \epsilon) - \frac{QE}{mL} \cos(\theta_e + \epsilon) = 0$

$\ddot{\epsilon} + \frac{g}{L} [\sin \theta_e \cos \epsilon + \cos \theta_e \sin \epsilon] - \frac{QE}{mL} [\cos \theta_e \cos \epsilon - \sin \theta_e \sin \epsilon] = 0$

On fait un D.L. à l'ordre autour de $\epsilon = 0$

$\cos \epsilon \approx 1$

$\sin \epsilon \approx \epsilon$

$\ddot{\epsilon} + \left(\frac{g}{L} \cos \theta_e + \frac{QE}{mL} \sin \theta_e \right) \epsilon + \frac{g}{L} \sin \theta_e - \frac{QE}{mL} \cos \theta_e = 0$

Or d'après la condition d'eq. établie à la question 1 -

$\frac{g}{L} \sin \theta_e - \frac{QE}{mL} \cos \theta_e = 0$

D'où $\ddot{\epsilon} + \left(\frac{g}{L} \cos \theta_e + \frac{QE}{mL} \sin \theta_e \right) \epsilon = 0$

On obtient l'équation d'un oscillateur

harmonique de période

$T_0 = 0,59 \text{ s}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} \cos \theta_e + \frac{QE}{mL} \sin \theta_e}}$

Ex 4 Saut à l'élastique.

1- Lorsque l'élastique commence à se tendre sa longueur usée l_0 .
 ou $x = l_0$.

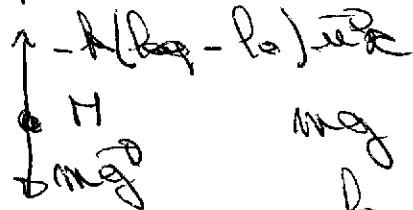
1- Appliquons le R. de l'Ec entre $t=0$ et t_0

$$\Delta E_c = E_c(t_0) - E_c(0) = W_{Poids}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mg l_0$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gl_0} = 39,6 \text{ m.s}^{-1}}$$

2- A l'eq



$$mg - k(l_{eq} - l_0) = 0$$

$$l_{eq} = \frac{mg}{k} + l_0 = 80,8 \text{ m}$$

$l_{eq} < H$ saut paraissant sans risque.

3- Allongement maxi lorsque m est arrivée à une distance d t.q $v(d) = 0$.

Conservation de l'en. mécanique :

$$E_m = E_m(0) = 0 \quad \text{car } x=0, \quad \dot{x}=0$$

$$E_m(t_d) = \frac{1}{2} m v^2 + mgd + \frac{1}{2} k(d - l_0)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} k(d^2 - 2dl_0 + l_0^2) - mgd = 0$$

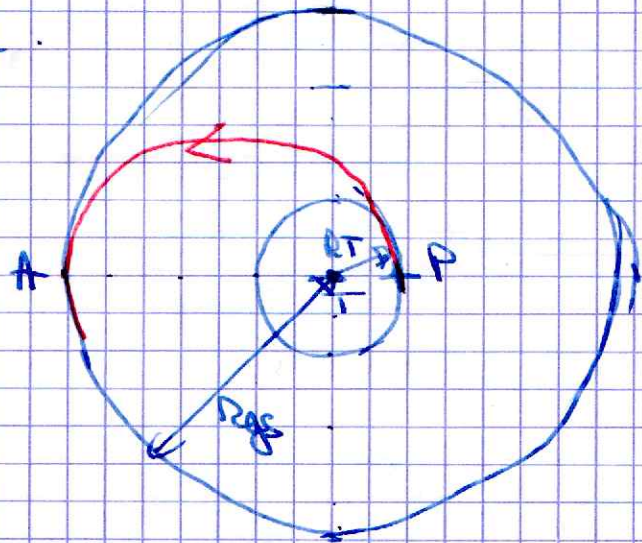
$$d^2 - (2l_0 + \frac{2mg}{k})d + l_0^2 = 0$$

$$d^2 - 2l_{eq}d + l_0^2 = 0$$

$$\boxed{d = l_{eq} + \frac{1}{2} \sqrt{4l_{eq}^2 - 4l_0^2} = l_{eq} + \sqrt{l_{eq}^2 - l_0^2} = 92 \text{ m}} \\ < H$$

Ex: mise en orbite d'un satellite géostationnaire.

1 -



2 - v_1 = première vitesse cosmique.

$$-m \frac{v_1^2}{R_T} = -G \frac{m_T m}{R_T^2}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G m_T}{R_T}} = 4,9 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

3 - v_2 = 2ème vitesse cosmique.

Pour que le satellite reste dans son état lié il faut que $E_m < 0$
 Cas limite $E_m = 0$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{G m_T m}{R_T} = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 G m_T}{R_T}} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

4 - 3ème loi de Kepler

$$\frac{R_{gs}^3}{T_{gs}^2} = \frac{G m_T}{4 \pi^2}$$

$$T_{gs} = 24 \times 3600 \text{ s}$$

$$R_{gs} = \sqrt[3]{\frac{G m_T T_{gs}^2}{4 \pi^2}} = 42.000 \text{ km}$$

$$R_{gs} = 42.227 \text{ km}$$

$$h_{gs} = R_{gs} - R_T = 35.847 \text{ km} \quad (3,6 \cdot 10^4 \text{ km})$$

$$5. \quad J_a = R_T + r_{\text{ges}} = 2 \quad \underline{a = 2,4 \cdot 10^4 \text{ km}}$$

$$6. \quad R_T = \frac{T_e}{2} \quad \frac{a^3}{T_e^2} = \frac{G M_T}{4 \pi^2}$$

$$\underline{\Delta E = \frac{1}{2} \left(\frac{4 \pi^2 a^3}{G M_T} - 1 \right) = 1,8 \cdot 10^4 \text{ J}} \quad (5R)$$

$$7. \quad E_M = m v_e$$

$$E_M = - \frac{G M_T M}{2a} = \frac{1}{2} M v_p^2 - \frac{G M_T M}{R_T}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T} - \frac{G M_T}{a}}$$

$$v_p = \sqrt{G M_T} \sqrt{\frac{2}{R_T} - \frac{1}{a}}$$

$$\underline{v_p = 10,4 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}}$$

$$R_T v_p = R_{\text{ges}} v_a$$

$$\underline{v_a = 1,6 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}}$$

Conservation der
Winkelimpulse
in A & B
unterst ist
rausgerechnet
mit 1

Ex 7:

1

1 - Météorite soumise à l'attraction gravitationnelle de la Terre qui est conservative $\Rightarrow E_m = \text{cte}$
 A l'instant initial, on peut considérer $E_f = 0$

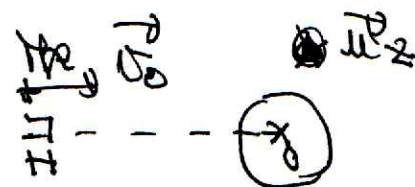
$$E_m = E_c(0) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

2 - On applique le th. du moment cinétique en O à la météorite.

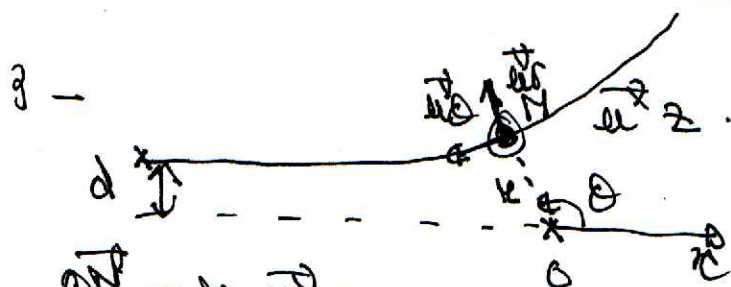
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_{T+M}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_{T+M} = \vec{0}$$

car $\vec{F}_{T+M}$ colinéaire à $\vec{OM}$

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_O = m \vec{OM} \wedge \vec{v}_O$$



$$\vec{L}_O = m d \vec{OM} \wedge \vec{u}_z$$



$$\vec{OM} = r \vec{u}_r$$

$$\vec{v}(M) = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r$$

Lorsque $r = r_{\min}$ $\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v}(M) = r(t) \vec{\omega}$

$$\vec{L}_O = -m d r \vec{u}_z = m r_{\min} v \vec{u}_z \Rightarrow v = \frac{d}{r_{\min}}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r_{\min}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} x_{\text{min}} - \frac{GMm}{x_{\text{min}}} = \frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} x$$

4. The value limits of x are $x_{\text{min}} = R$.

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} x - 2g_0 = \frac{d^2}{dt^2} x$$

(Given R , m)

$$\frac{d^2}{dt^2} x \left(\frac{d^2}{dt^2} - 1 \right) = 2g_0$$

$$x = \sqrt{\frac{2g_0 R^3}{d^2 - R^2}}$$

$$x = 7.5 \text{ m. s}^{-1}$$