

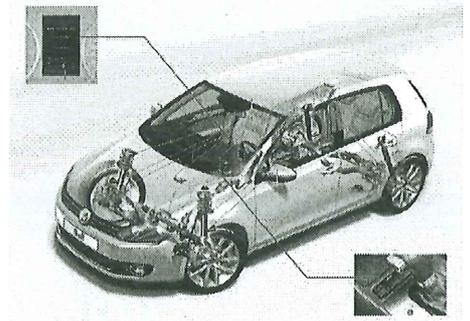
Asservissements

Conception d'un correcteur

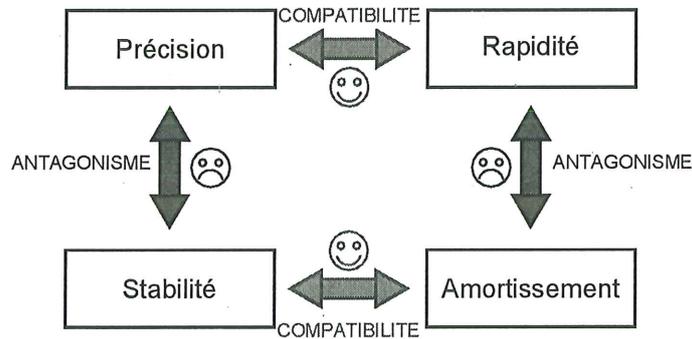
PSI - MP : Lycée Rabelais

On s'intéresse ici au choix du correcteur pour l'asservissement en position d'une voiture avec assistance au stationnement (modèle e-Golf). On souhaite vérifier ici que le système pourra répondre au cahier des charges donné ci-dessous.

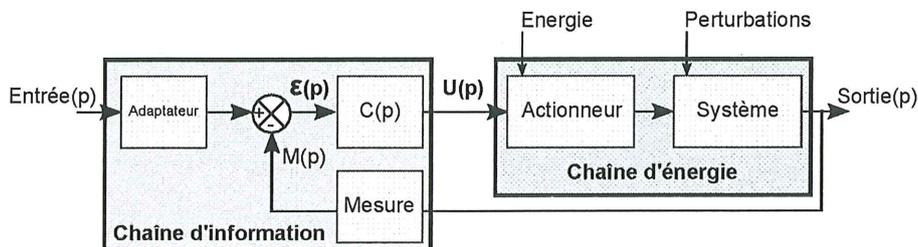
Stabilité	Marge de phase $> 45^\circ$
	Marge de gain > 10 dB
Précision	Écart statique nul (pour une entrée en échelon)
	Insensible à une perturbation échelon
Dépassements	Aucun
Rapidité	Temps de réponse à 5% < 30 s
	$\omega_{0\text{ dB}} > 5$ rad/s



Plus généralement, on souhaite qu'un système soit stable, bien amorti, rapide, précis, et si possible, insensible aux perturbations. Ces exigences ne sont malheureusement pas toujours compatibles. Par exemple, améliorer la précision ne peut se faire qu'au détriment des marges de stabilité ! Le schéma ci-dessous récapitule les grandeurs compatibles et antagonistes.



Une solution pour trouver un compromis sur l'ensemble des performances est d'ajouter un correcteur. Il existe différents modes de correction, mais nous nous limiterons à la correction en série. Dans ce cas, le correcteur est placé entre le soustracteur et le processus à commander.



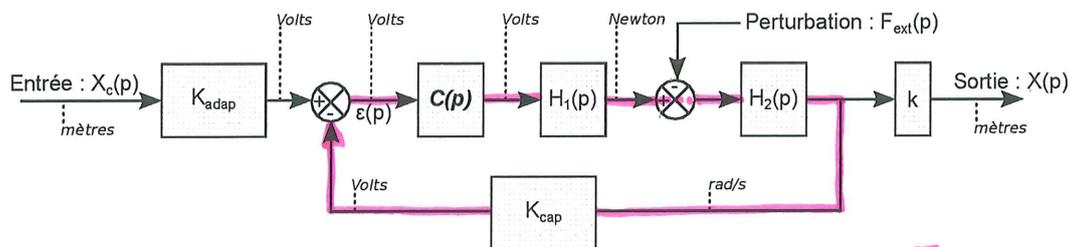
Le but du correcteur va donc être de modifier l'écart $\varepsilon(p)$ pour obtenir le signal $U(p)$ le plus efficace pour piloter le système. On dispose de trois outils mathématiques permettant de moduler ce signal : la proportionnalité, la dérivée et l'intégration.

1 Modélisation de l'asservissement en position

On suppose que l'étude permettant la modélisation a déjà été effectuée. L'entrée est alors la consigne de position $X_c(p)$ et la sortie est la position réelle de la voiture $X(p)$. Les entrées et sorties sont alors exprimées en mètres.

On notera également $F_{ext}(p)$ un effort perturbateur s'exerçant sur la voiture (exprimé en Newtons).

Les unités des autres grandeurs sont indiquées sur le schéma-bloc ci-dessous.



FTBO corrigé

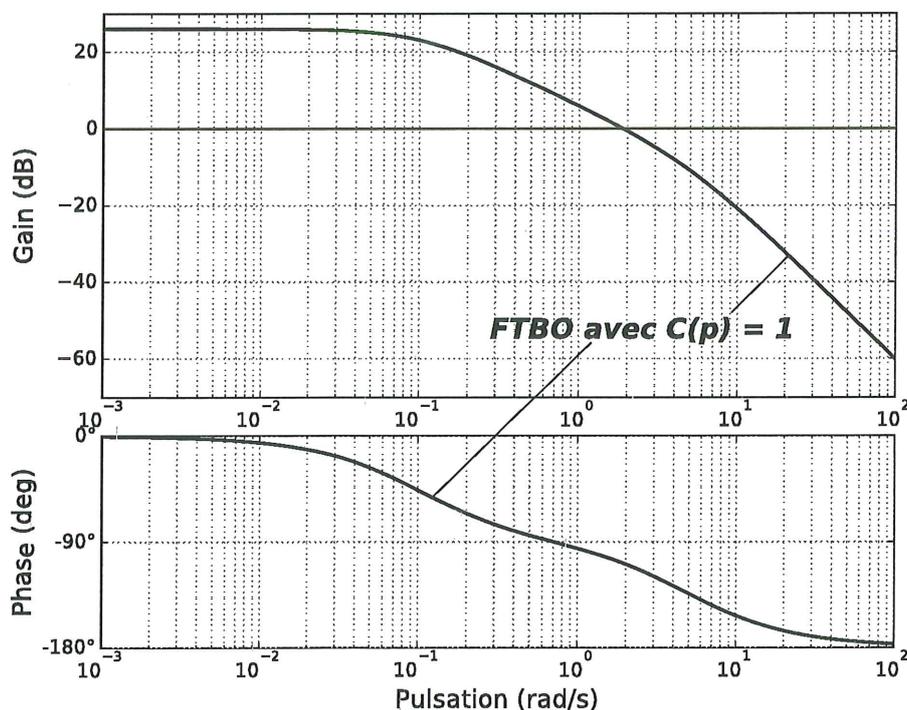
On considère pour traiter les futurs exemples que :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{1 + T_1 \cdot p} ; K_1 = 2 \text{ N/V} ; T_1 = 0,2 \text{ s} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{K_2}{1 + T_2 \cdot p} ; K_2 = 5 \text{ (rad/s)/N} ; T_2 = 10 \text{ s}$$

Et pour que l'asservissement soit opérationnel, il faut que :

$$K_{adap} = \frac{K_{cap}}{k} ; K_{cap} = 2 \text{ V/(rad/s)} ; k = 0,5 \text{ m}$$

Une étude préalable a également permis de tracer le **diagramme de Bode** de la FTBO dans le cas particulier où $C(p) = 1$.



2 Méthodologie

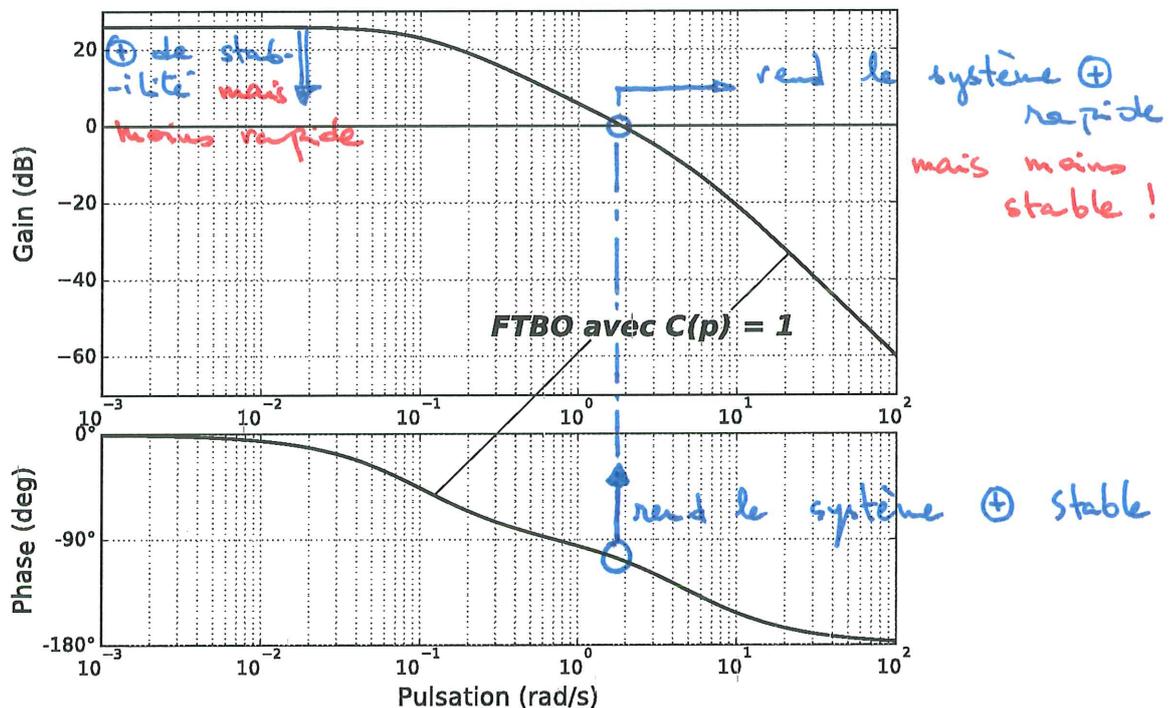
L'étude d'un asservissement sur un système automatique amène toujours son concepteur à réaliser un compromis entre :

- la stabilité, qu'amène la présence de gains faibles, et de déphasages faibles dans la FTBO.
- la précision, qu'amène la présence de gains forts et d'intégrateurs (ces derniers, toujours accompagnés d'un déphasage important) dans la FTBO.

D'une manière générale, la démarche de conception se décompose en deux étapes principales :

1. Choix du type de correcteur afin de vérifier le cahier des charges en termes de précision (nombre d'intégration nécessaire),
2. Ajustement des paramètres du correcteur afin de vérifier les exigences de stabilité et de rapidité (ce qui se traduit par le respect des marges de stabilité et par la validation de la bande passante à 0 dB de la FTBO).

Autant que possible, le correcteur devra cibler une plage de fréquence donnée. Sur le diagramme de Bode ci-dessous, on visualise bien les modifications à effectuer pour vérifier le cahier des charges.



3 Les différents correcteurs

3.1 Principe de la correction

On peut écrire : $FTBO_c(p) = C(p) \cdot FTBO_{NC}(p)$

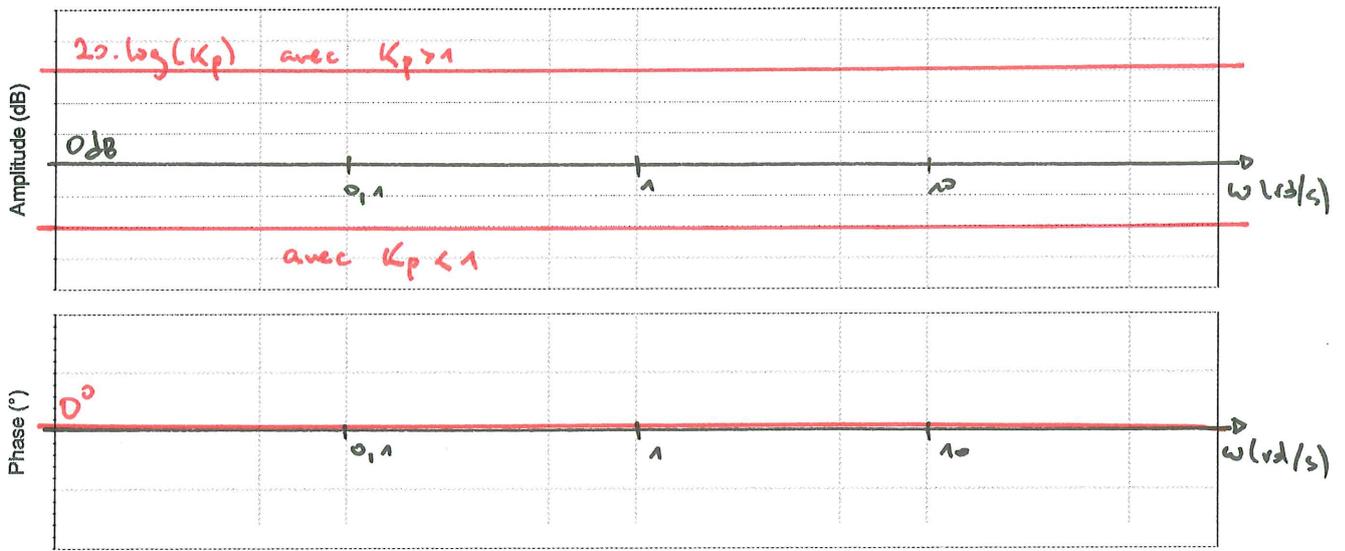
Et donc :

$$\begin{cases} G_{dB_c}(\omega) = G_{dB,correcteur}(\omega) + G_{dB_{NC}}(\omega) \\ \varphi_c(\omega) = \varphi_{correcteur}(\omega) + \varphi_{NC}(\omega) \end{cases}$$

3.2 Correcteur à action proportionnelle

Fonction de transfert du correcteur : $C(p) = K_p$

Ce type de correcteur permet d'obtenir une meilleure précision et une meilleure rapidité. Ce gain de performance s'obtiendra en augmentant la valeur du gain K_p . Ces améliorations de performances se feront néanmoins au détriment de la stabilité et de l'amortissement. Le respect du cahier des charges (en terme de stabilité et d'amortissement) imposera, au contraire, de limiter la valeur de K_p .



Réglage vis-à-vis de la précision : ici $FTBO_c(p) = K_p \cdot \frac{K_1}{1 + T_1 \cdot p} \cdot \frac{K_2}{1 + T_2 \cdot p} \cdot K_{cap}$

• La FTBO est de classe 0 donc le système ne sera pas précis vis-à-vis d'une entrée en échelon d'amplitude X_{co} . L'erreur associée sera :

$$E_s = \frac{X_{co}}{1 + K_p \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_{cap}}$$

Réglage vis-à-vis de la rapidité :

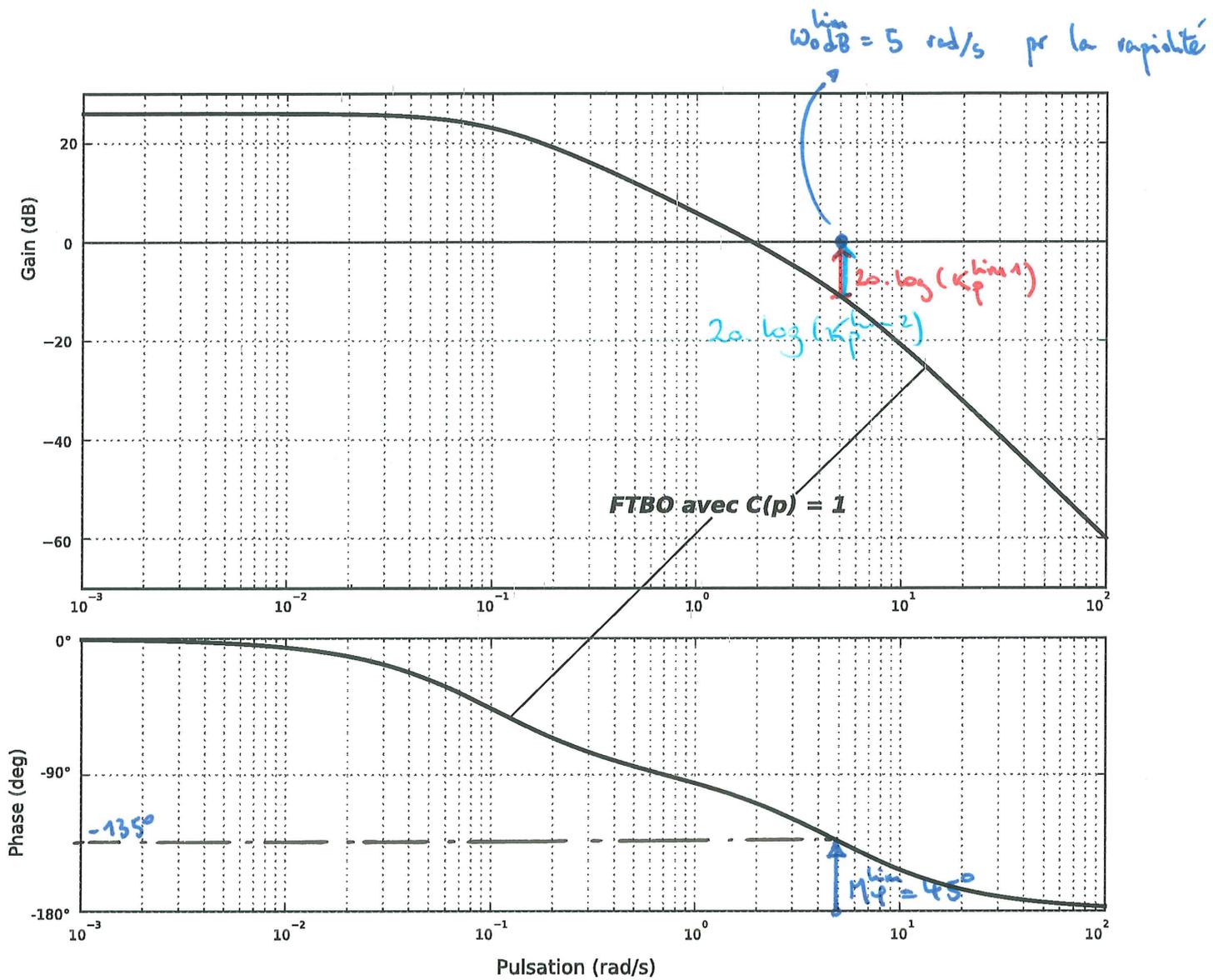
• Pour $tr_{50\%} < 30$ s, on peut calculer la FTBF (qui sera d'ordre 2) et calculer $tr_{50\%}$ dans le cas où

• $\xi = 1$: syst. le plus rapide et sans dépassement

(• $\xi = 0,7$: syst. le plus rapide (et avec dépassements))

• On sait que $G_{dB_c}(\omega) = 20 \cdot \log(K_p) + G_{dB_{nc}}(\omega)$: translate du gain de $20 \cdot \log(K_p)$
 $\varphi_c(\omega) = 0^\circ + \varphi_{nc}(\omega)$: pas de modification de la phase

Pour avoir $\omega_{0dB} > 5$ rad/s, il faut $20 \cdot \log(K_p) > \overbrace{20 \cdot \log(K_p^{lim 1})}^{\pm 10 \text{ dB}}$
 et donc $K_p > 10^{\frac{10}{20}}$ donc $K_p > 3,16$ sans unité



Réglage vis-à-vis de la stabilité :

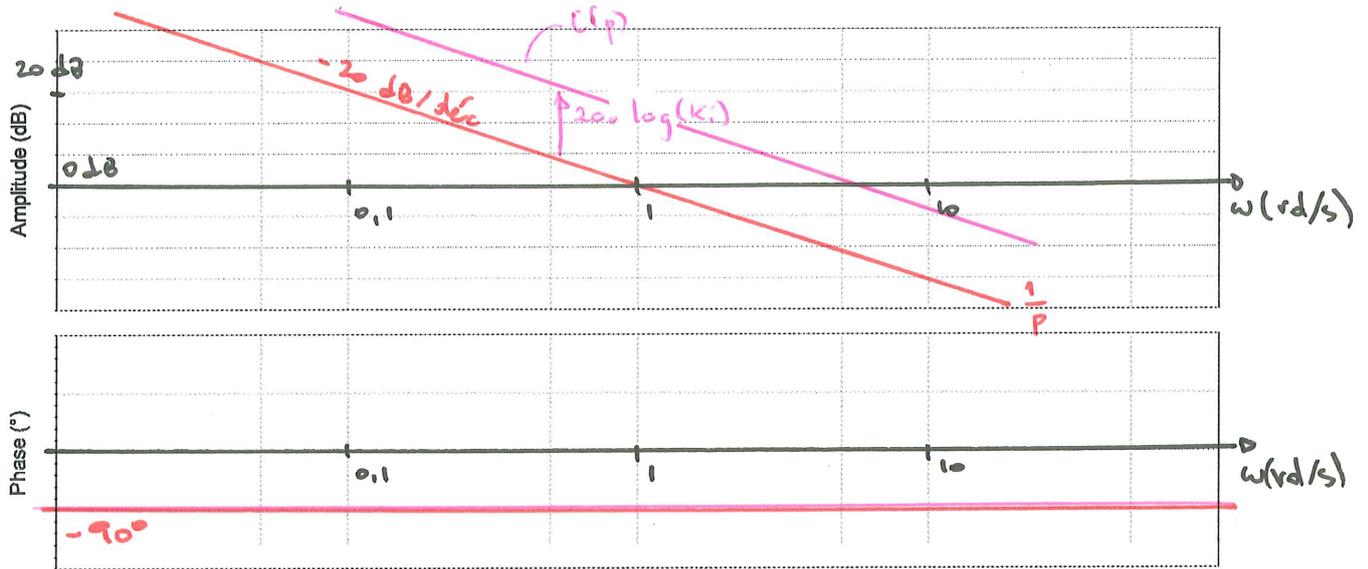
- Ici $M_G = +\infty$ donc $\forall K_p \in \mathbb{R}^{+*}$, $M_G > 10 \text{ dB}$.
- Pour avoir $M_\phi^{\text{lim}} = 45^\circ$, il faut $20 \cdot \log(K_p^{\text{lim}2}) \approx 10 \text{ dB}$ et donc $K_p^{\text{lim}2} \approx 3,16$
- Pour avoir $M_\phi > 45^\circ$, il faudra $K_p < 3,16$ (sans unité).

3.3 Correcteur à action intégrale

Fonction de transfert du correcteur : $C(p) = \frac{K_i}{p}$

L'utilisation d'un correcteur intégral permet d'augmenter la classe de la FTBO. De fait, la précision du système est donc améliorée.

Ce correcteur introduit également un déphasage de -90° (voir le diagramme de Bode tracé ci-dessous). Ce déphasage supplémentaire peut rendre le système instable !



Réglage vis-à-vis de la précision : la FTBO est maintenant de classe 1 et il y a une intégration en amont de la perturbation. Le système est donc précis vis-à-vis d'une entrée en échelon et insensible à une perturbation en échelon.

Réglage vis-à-vis de la stabilité : cette fois-ci, on a : $FTBO_c(p) = K_i \cdot \frac{1}{p} \cdot FTBO_{nc}(p)$

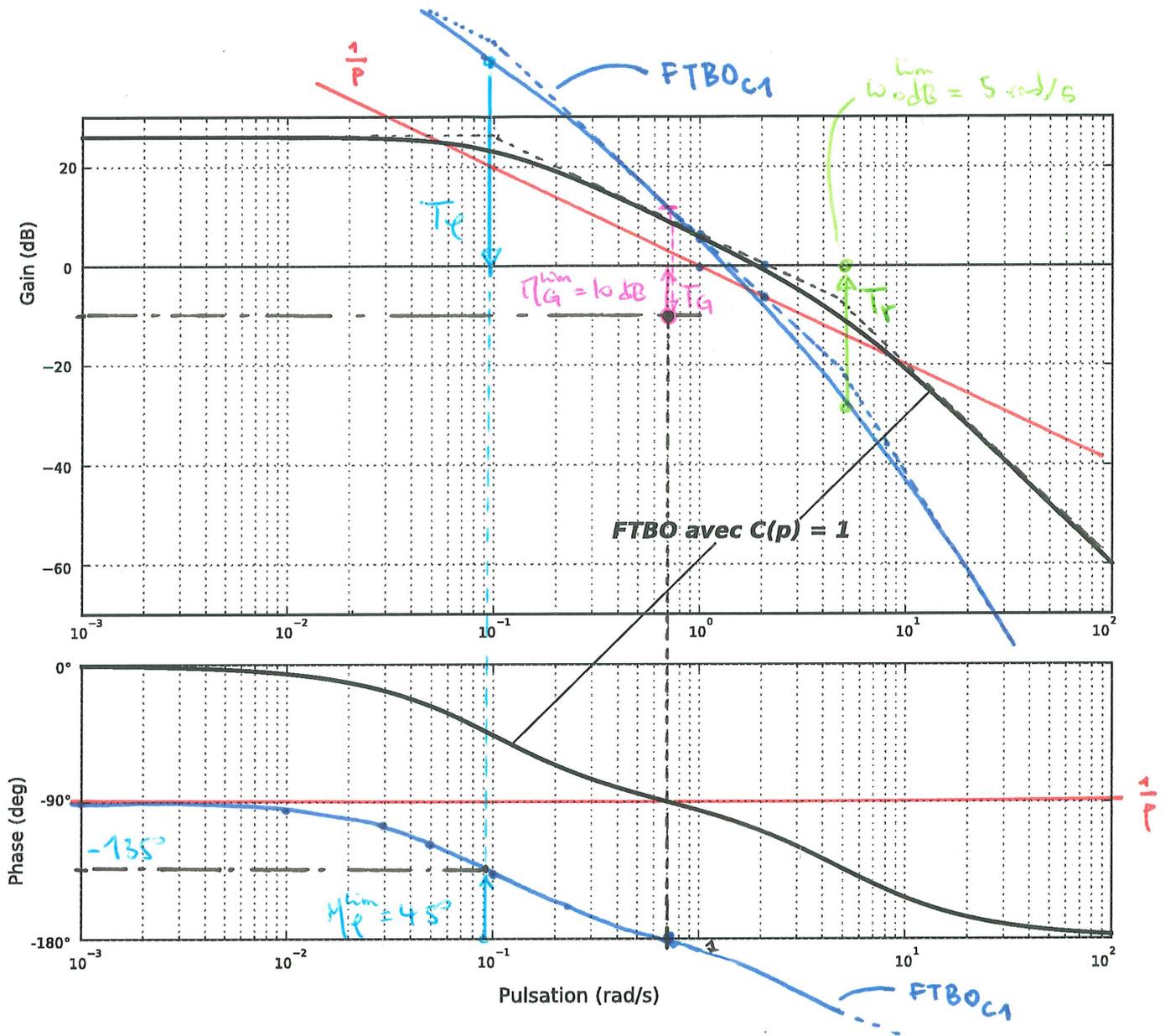
* $\frac{[K_i]}{[p]} = 1$ donc $[K_i] = [p] = \text{rad/s}$

$= K_i \cdot \underline{FTBO_{ca}(p)}$
 FTBO corrigée ds le cas particulier où $K_i = 1 \text{ rad/s}^*$
 (à tracer !)

• Pour avoir $M_G > 10 \text{ dB}$; il faut $20 \cdot \log(K_i) < T_G$
 et $T_G \leq -23 \text{ dB}$

donc $K_i < 10^{\frac{T_G}{20}}$

donc $K_i < 0,071 \text{ rad/s}$



- Pour avoir $M_P > 45^\circ$, il faut $20 \cdot \log(K_i) < T_P$
 où $T_P \approx -43 \text{ dB}$

$$\text{donc } K_i < 10^{\frac{T_P}{20}}$$

$$\text{donc } K_i < 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

- Pour respecter les deux marges, il faut $K_i < 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$.

Réglage vis-à-vis de la rapidité : pour avoir $w_{0dB} > 5 \text{ rad/s}$, il faut que

$$20 \cdot \log(K_i) > T_r \quad \text{où } T_r \approx 30 \text{ dB}$$

$$\text{donc } K_i > 10^{\frac{T_r}{20}}$$

$$\text{donc } K_i > 32 \text{ rad/s}$$

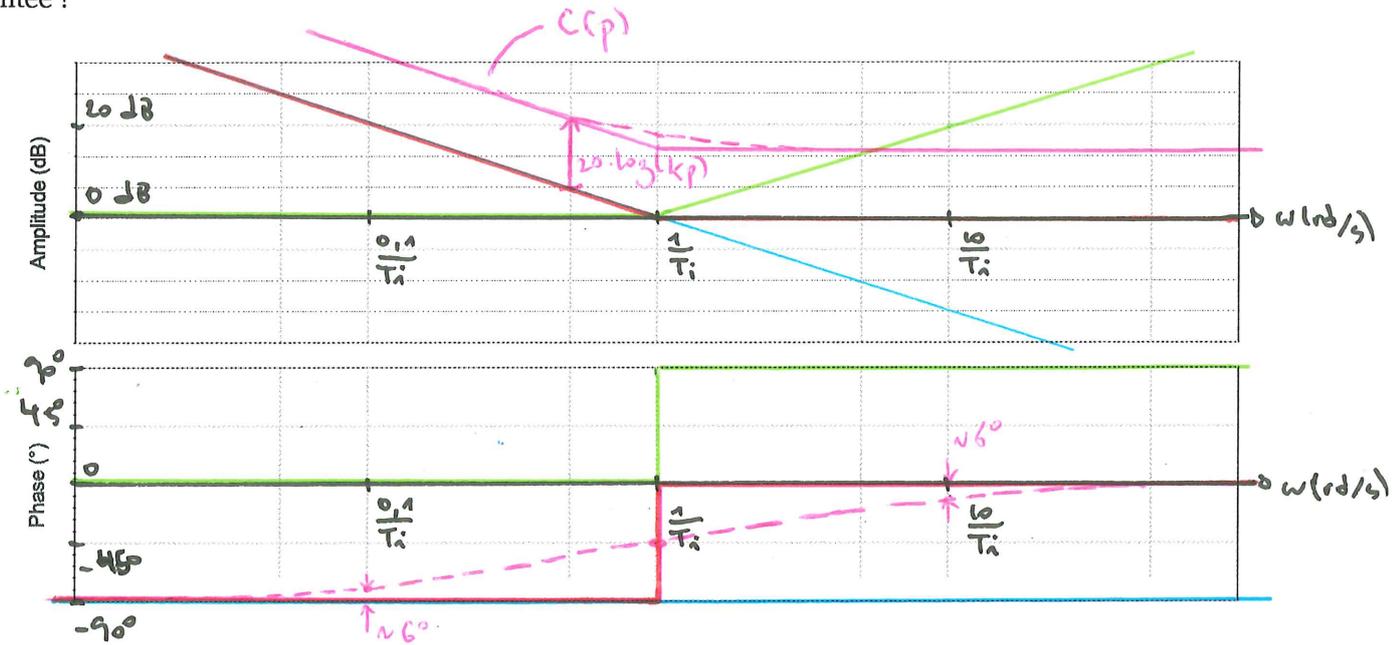
S'écrit aussi : $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$

3.4 Correcteur à action proportionnelle-intégrale

Fonction de transfert du correcteur : $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K_p \frac{1 + T_i p}{T_i p} = K_p \cdot \frac{1}{T_i \cdot p} \cdot (1 + T_i \cdot p)$

Afin de ne pas introduire ce déphasage supplémentaire sur toute la gamme de pulsation, on privilégie l'utilisation d'un correcteur dit proportionnel intégral.

L'inconvénient du déphasage de -90° sur toute la gamme de pulsation est levé puisque à haute fréquence, ce correcteur ne provoque plus de déphasage (voir le diagramme de Bode ci-dessous). Pour autant la classe de la FTBO est bien augmentée !



Pour ce type de correcteur, le choix des paramètres est plus complexe. Il existe principalement deux méthodes.

Compensation du pôle dominant : Lorsque la fonction de transfert en boucle fermée du système à asservir possède un pôle dominant p_1 , cela signifie donc qu'il y aura donc une constante de temps T_1 telle que $T_1 = -\frac{1}{p_1}$. **Compenser le pôle dominant revient donc à choisir $T_i = T_1$!** Cette méthode peut se généraliser pour n pôles avec un correcteur qui possède donc n constantes de temps.

Cela signifie que si la FTBO non-corrigée s'écrit sous forme factorisée :

$$FTBO_{NC}(p) = \frac{K \left[1 - \frac{p}{p_1^d} \right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^d} \right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^d} \right] \dots}{p^\alpha \left[1 - \frac{p}{p_1^d} \right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^d} \right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^d} \right] \dots}$$

Compenser le pôle $p_1^d = -\frac{1}{T_1}$ (par exemple) revient à choisir $T_i = T_1$. Dans ce cas, on pourra écrire la FTBO

corrigée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 FTBO_C(p) = C(p) \cdot FTBO_{NC}(p) &= K_p \frac{1 + T_i p}{T_i p} \cdot \frac{K \left[1 - \frac{p}{p_1^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^d}\right] \dots}{p^\alpha \left[1 - \frac{p}{p_1^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^d}\right] \dots} \\
 &= K_p \frac{1 + T_1 p}{T_1 p} \cdot \frac{K \left[1 - \frac{p}{p_1^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^d}\right] \dots}{p^\alpha \left[1 + T_1 \cdot p\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^d}\right] \dots} \\
 &= K_p \frac{1}{T_1 p} \cdot \frac{K \left[1 - \frac{p}{p_1^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_2^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^d}\right] \dots}{p^\alpha \left[1 - \frac{p}{p_2^d}\right] \cdot \left[1 - \frac{p}{p_3^d}\right] \dots}
 \end{aligned}$$

Application à partir de l'exemple donné : on a ici :

$$\begin{aligned}
 FTBO_C(p) &= C(p) \cdot FTBO_{NC}(p) \\
 &= K_p \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \cdot \frac{K_1}{1 + T_1 \cdot p} \cdot \frac{K_2}{1 + T_2 \cdot p} \cdot K_{loop}
 \end{aligned}$$

Ici $T_2 \gg T_1$ donc le pôle associé à la constante de temps T_2 est donc dominant.

Je choisis donc $T_i = T_2$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
 FTBO_C(p) &= K_p \cdot \frac{\cancel{1 + T_2 \cdot p}}{T_2 \cdot p} \cdot \frac{K_1}{1 + T_1 \cdot p} \cdot \frac{K_2}{\cancel{1 + T_2 \cdot p}} \cdot K_{loop} \\
 &= \frac{K_p \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_{loop}}{T_2 \cdot p \cdot (1 + T_1 \cdot p)}
 \end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à déterminer $K_p \dots$

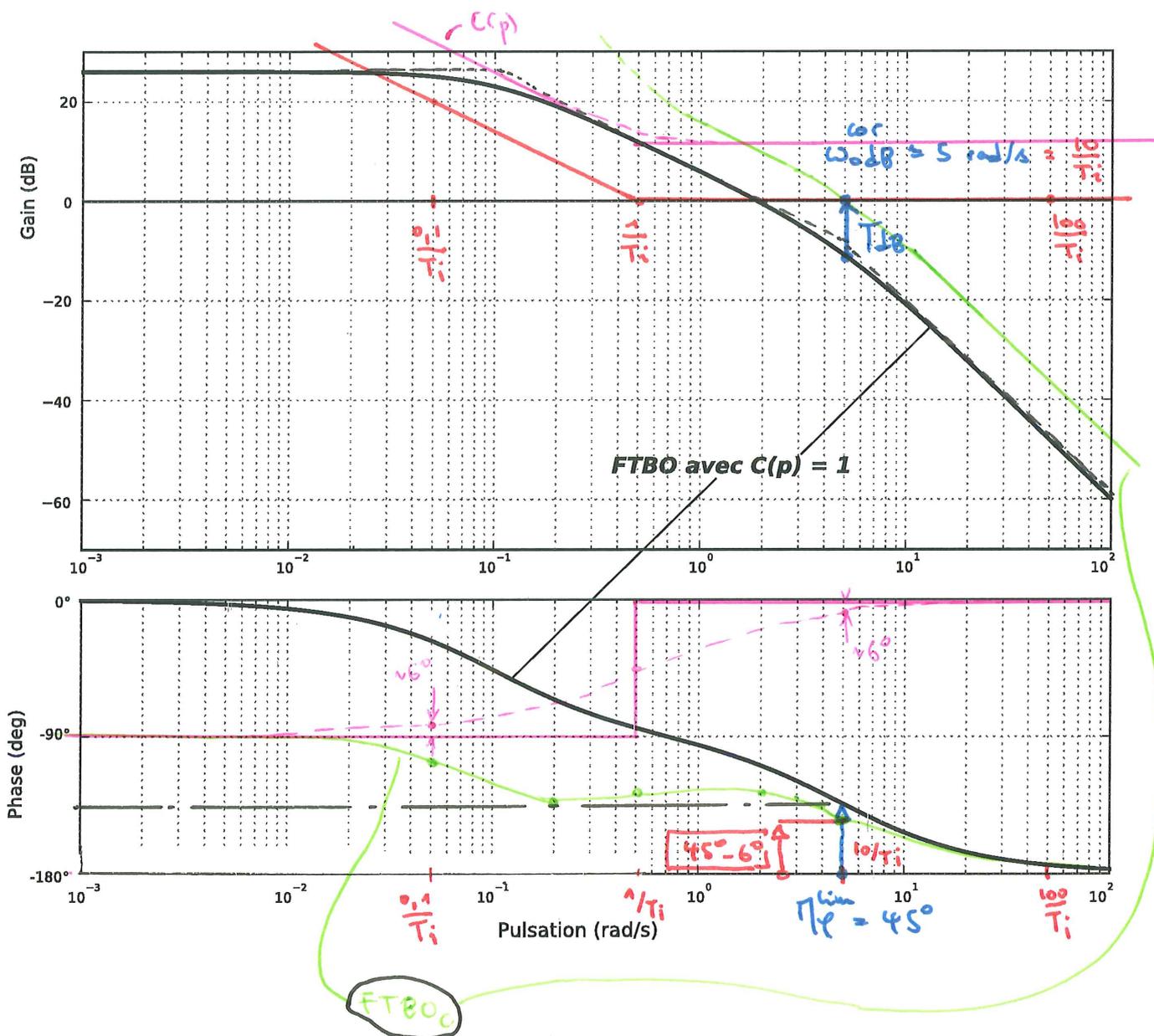
Utilisation des marges : Cette méthode nécessite deux étapes.

1. **Détermination de K_p** : On choisit le coefficient K_p de façon à obtenir la marge de phase désirée avec la correction proportionnelle seule. La mesure de la translation (T_{dB}) donne la valeur de K_p en dB soit :

$$K_p = 10^{\frac{T_{dB}}{20}} \approx 3,16 \text{ (sans unité)}$$

2. **Détermination de T_i** : On met ensuite en place l'effet intégral mais cela ne doit pas (ou peu) modifier le réglage effectué à la pulsation ω_{0dB}^{cor} . Il faut donc prendre une constante de temps T_i tel que $\frac{1}{T_i} \ll \omega_{0dB}^{cor}$. On choisit en général $T_i \approx \frac{10}{\omega_{0dB}^{cor}} \approx 2 \text{ s}$.

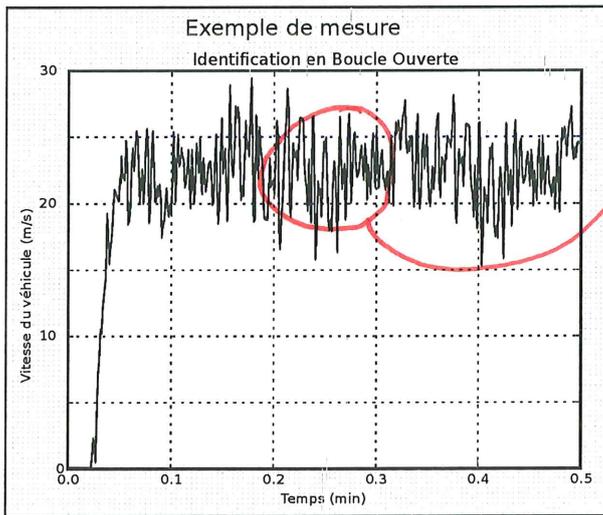
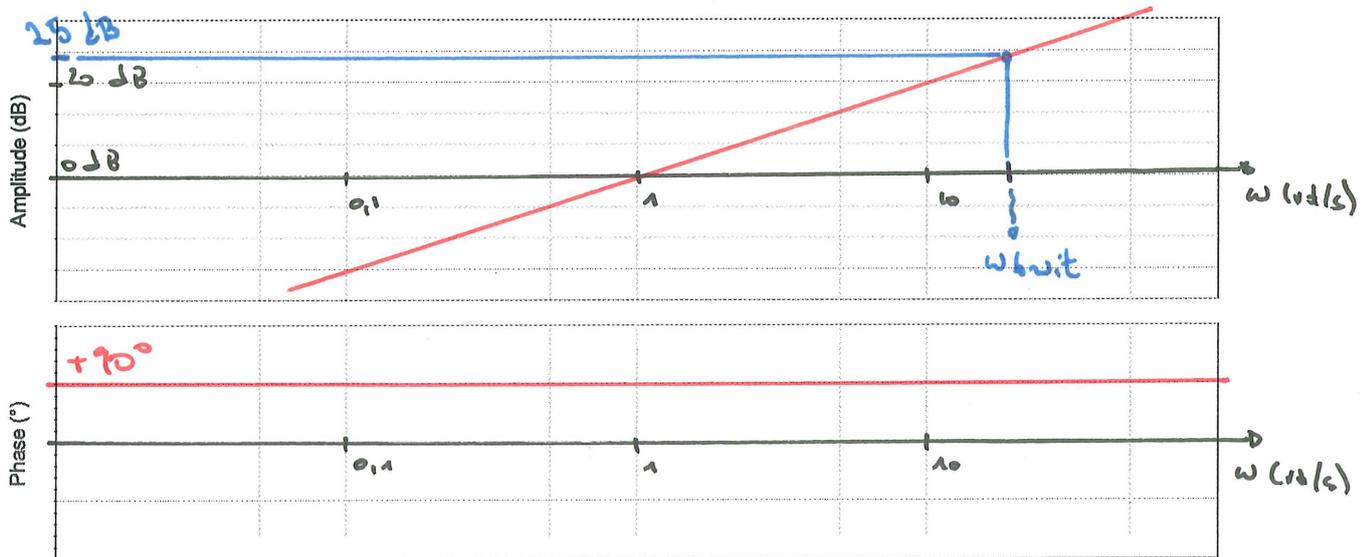
NOTA : Le choix de T_i modifie légèrement la marge de phase (-6°) mais on peut éventuellement anticiper cet incon-
vénient en choisissant K_p de façon à obtenir la marge de phase souhaitée $+6^\circ$.



3.5 Correcteur à avance de phase

Fonction de transfert du correcteur dérivé : $C(p) = K_d \cdot p$

Un correcteur à action dérivée n'est jamais utilisé en réalité mais peut servir pour une approche purement théorique. Si l'on trace son diagramme de Bode (figure ci-dessous), on remarque d'abord que la phase est positive. C'est cette propriété qui sera utilisée afin de stabiliser la commande des systèmes. Cependant pour des hautes fréquences, le gain de ce type de correcteur temps vers l'infini. Cela pose un réel problème de mise en œuvre. Dans la réalité, les signaux sont plus ou moins bruités. Ce bruit est souvent composé de très hautes fréquences. L'utilisation de ce type de correcteur mènerait donc à l'amplification du bruit ! Cela n'est, bien entendu, pas acceptable.



On compte ici environ 17 "périodes" donc un bruit ayant une fréquence caractéristique de 2,8 Hz et donc une pulsation caractéristique de 18 rad/s.

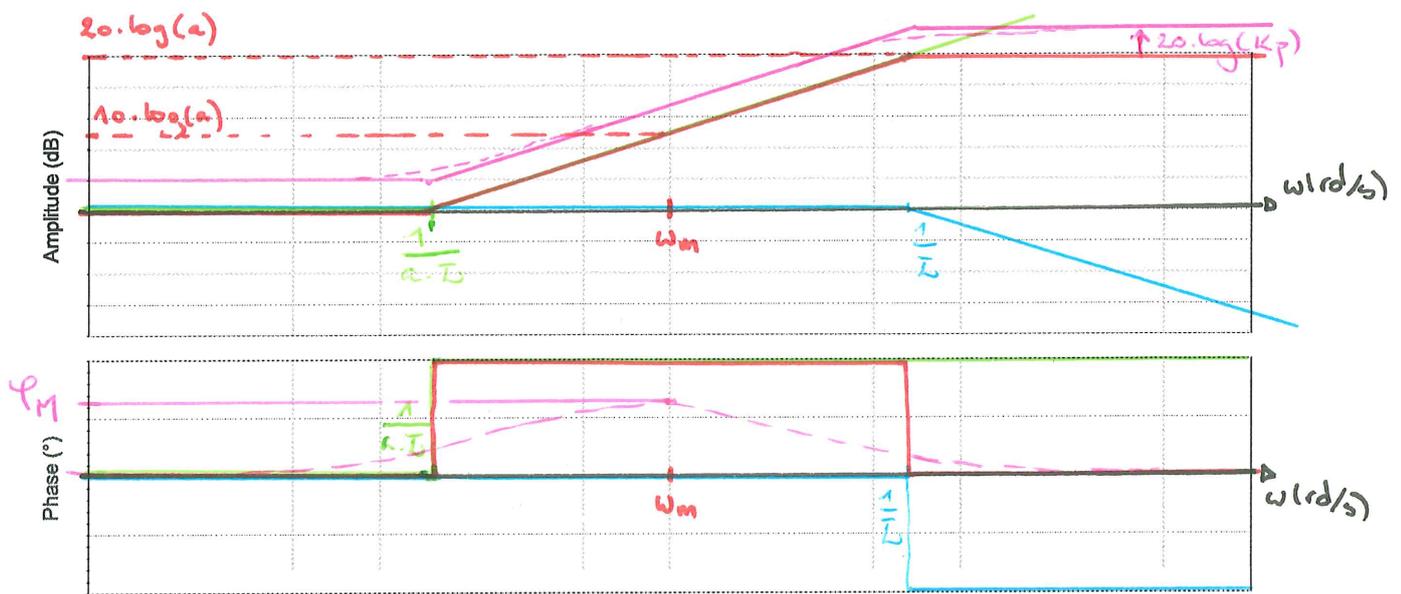
Cela donne une amplification de 25 dB,

le signal bruité est donc multiplié par $10^{\frac{25}{20}} \approx \underline{\underline{18}}$!

On utilise donc un correcteur dit à avance de phase qui permet d'éviter ce problème.

Fonction de transfert du correcteur à avance de phase : $C(p) = K_p \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ avec $a > 1$

Le paramètre a est appelé "largeur de bande". La réponse harmonique d'un tel correcteur est représentée ci-dessous.



On a également :

à savoir FAIRE $\left(\omega_M = \frac{1}{\tau \cdot \sqrt{a}} \right)$ et $\sin(\varphi_M) = \frac{a-1}{a+1}$ DONNÉ

ω_M est la moyenne "logarithmique" de $\frac{1}{a \cdot \tau}$ et de $\frac{1}{\tau}$ et donc

$$\log(\omega_M) = \frac{1}{2} \cdot \left(\log\left(\frac{1}{a \cdot \tau}\right) + \log\left(\frac{1}{\tau}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{1}{a \cdot \tau^2}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{\tau \cdot \sqrt{a}}\right) \text{ et donc } \omega_M = \frac{1}{\tau \cdot \sqrt{a}}$$

Le choix de a et τ s'effectue de telle façon que son efficacité soit maximale dans la zone de la pulsation où le gain de la FTBO sans correction est nul (c'est à partir de cette pulsation que l'on calcule la marge de phase !). Une solution efficace est donc de choisir $\omega_M = \omega_{0dB}$ où ω_{0dB} est la pulsation telle que le gain est nul pour cette pulsation. Dans ce cas, on a :

$$\omega_M = \omega_{0dB} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{\omega_{0dB} \cdot \sqrt{a}}$$

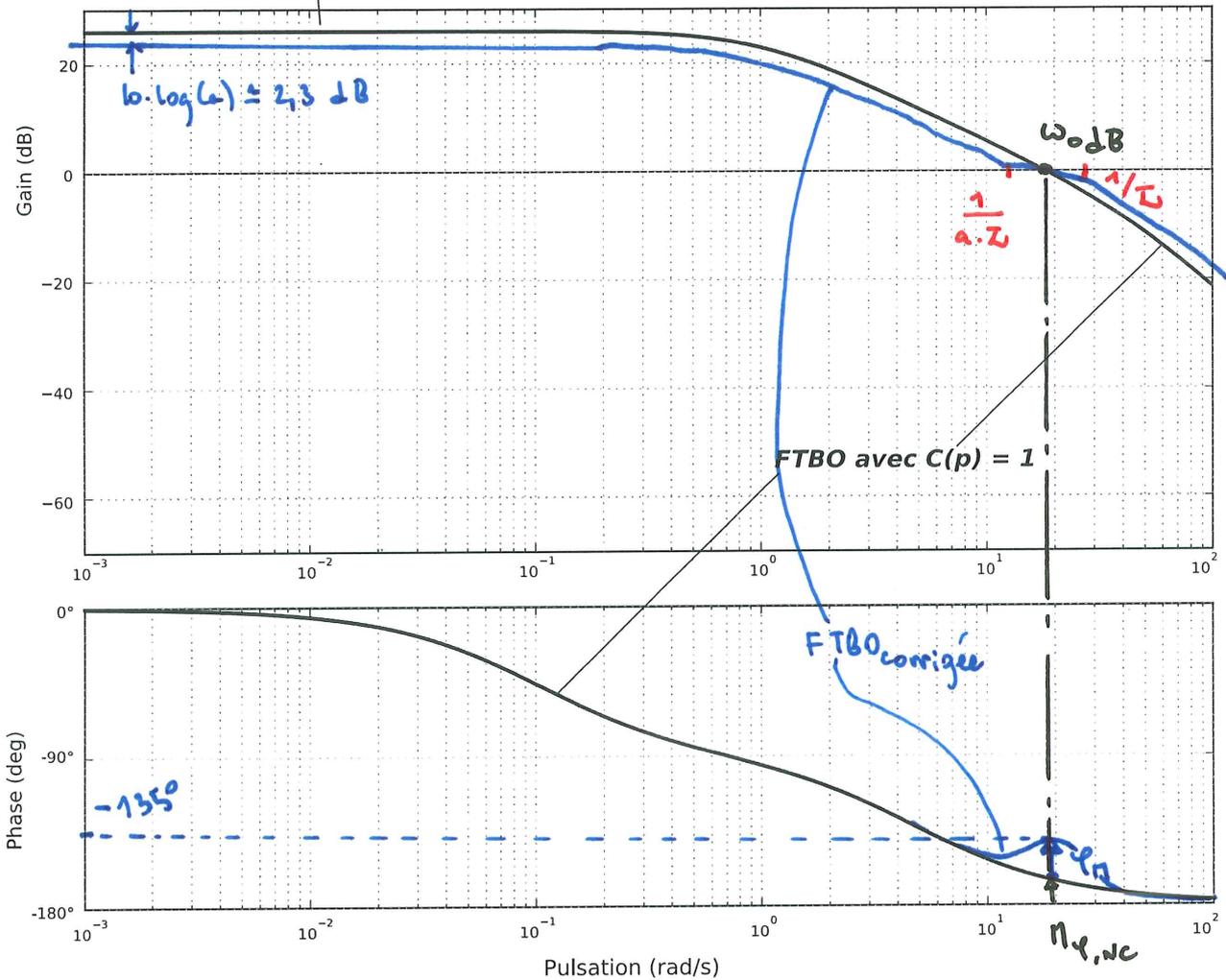
Pour choisir ce correcteur, il faut donc suivre les étapes suivantes :

1. Mesurer la marge de phase de la FTBO non-corrigée
2. En déduire φ_M puis la largeur de bande correspondante (avec $\sin(\varphi_M) = \frac{a-1}{a+1}$) pour respecter la marge de phase
3. Calculer la valeur de τ en prenant $\omega_M = \omega_{0dB}$

Attention : Ces étapes ont modifié la courbe de gain. Un réajustement est donc nécessaire !

4. Réajuster la marge de phase avec le gain K_p

La courbe a été "artificiellement" modifiée pour cet exemple sinon le correcteur n'a aucun intérêt !



1) Ici $\eta_{\varphi, NC} \approx 15^\circ$

2) Il faut donc $\varphi_{\eta} \approx \overbrace{45^\circ}^{\eta_{\varphi, voulu}} - \underbrace{15^\circ}_{\eta_{\varphi, NC}} \approx 30^\circ$ et $a \cdot \sin \varphi_{\eta} + \sin \varphi_{\eta} = a - 1$
 donc $a \cdot (1 - \sin \varphi_{\eta}) = 1 + \sin \varphi_{\eta}$
 donc $a = \frac{1 + \sin \varphi_{\eta}}{1 - \sin \varphi_{\eta}} \approx 1,7$

3) Comme $T = \frac{1}{\omega_{0dB} \cdot \sqrt{a}} \approx 38 \text{ ms}$

4) On voit que $G_{dB_c}(\omega_{\eta}) = 0 \text{ dB} = \overbrace{0 \text{ dB}}^{G_{dB_{NC}}(\omega_{\eta})} + 10 \cdot \log(a) + 20 \cdot \log(K_p)$

Il faut donc $K_p = -\frac{1}{2} \cdot \log(a)$ donc $K_p = \frac{1}{\sqrt{a}} \approx 0,77$ (sans unité)

Fin du cours sur les asservissements !