EXERCICES PHYSIQUE QUANTIQUE série 2

<u>Exercice 1 :</u> Chute de potentiel

On considère un problème stationnaire unidimensionnel: une particule de masse m évolue dans le potentiel V(x) défini par:

$$V(x<0)=V_o, \qquad V(x>0)=V_1$$

et l'on considère ici le cas $V_1 < V_o$. On envoie sur cette marche de potentiel une onde de matière incidente associée à une énergie $E_o > V_o$.

1- Faites un schéma pour représenter les grandeurs énergétiques pertinentes en fonction de x.
2- Expliquez ce qu'il se passerait dans la situation classique associée, en précisant les expressions des grandeurs cinématiques .
3- Déterminer la forme générale de l'état quantique stationnaire dans le domaine x < 0, puis dans le domaine x > 0, ainsi que les courants de probabilités associés.
4- Explicitez les conditions aux limites sur la fonction d'onde, et en déduire un coefficient de réflexion et un coefficient de transmission en probabilité.
5- Discutez les spécificités du comportement quantique.

<u>Exercice 2 :</u> Puits infini: état non stationnaire

On étudie l'évolution d'une particule quantique, de masse m, piégée dans un puits de potentiel infini de largeur a: V(x) =0 pour 0 <x < a et V(x) = $+\infty$ en dehors de cet intervalle.
On considère un état stationnaire de la particule quantique, d'énergie E_n, associé à une fonction d'onde propre de la forme: $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a})$ où n= 1,2,3, …..

1- Donner la valeur de l'énergie E_n. On pose $E_1=\hbar w_0$. Exprimer w_0 en fonction de a , m et $\hbar$. Exprimer ensuite E_n en fonction de n , $\hbar$ et w_0.
2- On considère l'état décrit par la fonction d'onde $\Psi_n(x,t)$ telle que $\Psi_n(x,t=0)=\phi_n(x)$. Donner l'expression de $\Psi_n(x,t)$ pour t > 0 .
3- On considère maintenant l'état décrit par la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ telle que

$$\Psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x)+\phi_2(x))$$

a. En utilisant le résultat de la question précédente, donner l'expression de $\Psi(x,t)$ pour t > 0.
b. On définit les deux états suivants:

$$\phi_g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x)+\phi_2(x)) \quad \text{et} \quad \phi_d(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x)-\phi_2(x))$$

Exprimer $\Psi(x,t)$ en fonction de $\phi_g(x)$ et $\phi_d(x)$. En déduire l'expression de la densité de probabilité de présence P(x, t) . Montrer qu'elle oscille à une fréquence ν que l'on exprimera en fonction de wo et h, puis en fonction de E2, E1 et h.

<u>Exercice 3:</u> marche de potentiel

On étudie le mouvement d'une particule quantique dans le potentiel V(x) (marche de potentiel)

$V(x)=0$ pour x < 0
$V(x)=V_0>0$ pour $x\geq 0$

On envisage le cas d'une particule quantique incidente d'énergie E > Vo.

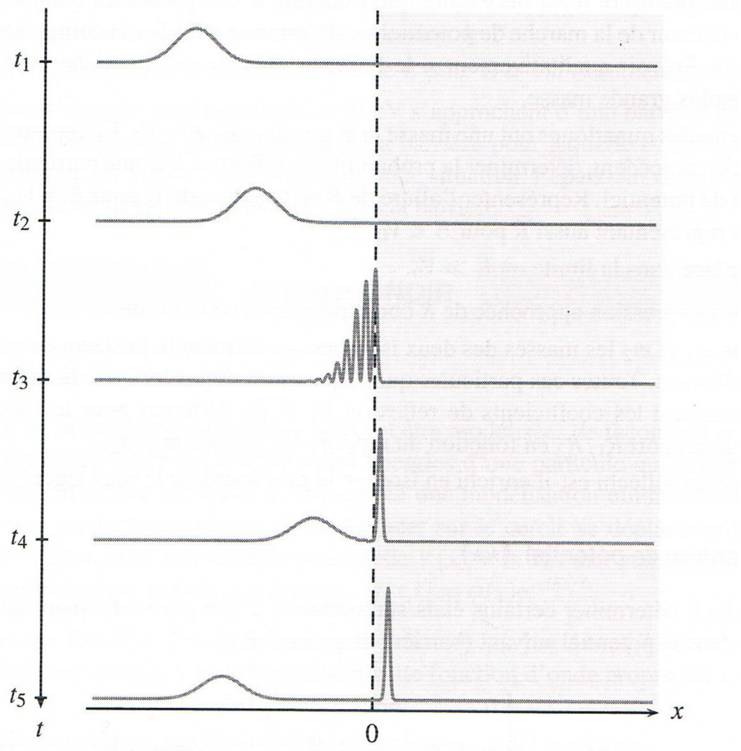
On pose $k_1=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $k_2=\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

1- Montrer qu'un état stationnaire de la particule peut être représenté par la fonction d'onde propre:

$\phi(x) = A\exp(ik_1x) + rA\exp(-ik_1x)$ pour x < 0 (région I) et $\phi(x) = tA\exp(ik_2x)$ *pour* $x \geq 0$ (région II), où A est une constante non nulle.

2- Écrire les relations de raccordement en x = 0 et en déduire les expressions de r et de t. Examiner le cas où E » Vo et commenter.

3- En superposant des états stationnaires d'énergies voisines de E, on forme un paquet d'ondes représentant une particule quantique incidente. La figure ci-dessous représente l'évolution dans l'espace et dans le temps de ce paquet d'ondes. La zone colorée correspond à la région II ($x \geq 0$) où V(x) = Vo. Le temps s'écoule du haut vers le bas de la figure.



Commenter aussi précisément que possible ces graphes.

4.Dans la situation où E <V0, l'expression de la fonction d'onde propre dans la région I peut être conservée. Expliquer cependant comment est modifié k2 et par suite, le coefficient r. En déduire alors l'expression de la probabilité de réflexion R de la particule. Commenter.

5.Application : enrichissement isotopique :

Une source envoie, depuis $-\infty$, un faisceau de particules quantiques, constitué d'un mélange de deux isotopes. On souhaite utiliser le phénomène de réflexion sur la marche de potentiel pour modifier la composition isotopique du mélange.

a-Expliquer pourquoi il est nécessaire que l'énergie E des particules quantiques soit supérieure à la hauteur de la marche de potentiel Vo si l'on veut modifier, la composition isotopique du mélange. Prévoir qualitativement si le faisceau réfléchi est plus riche ou plus pauvre en isotope de plus grande masse.

b- Les particules quantiques ont une masse met une énergie E > V0. Déterminer la probabilité de réflexion R d'une particule quantique par la marche de potentiel. Représenter l'allure de R en fonction de $\xi = \frac{E}{V_0}$ pour E > Vo. Compléter ce graphe en représentant aussi R pour E <Vo.

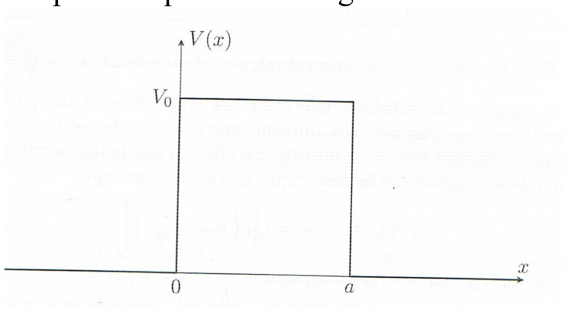
c-On se place dans la limite où E » Vo.

Donner l'expression approchée de R correspondant à cette limite.

On note ml et m2 les masses des deux isotopes qui forment le faisceau de particules quantiques incidentes. Toutes ces particules quantiques sont envoyées avec la même vitesse. Expliquer pourquoi les coefficients de réflexion R1 et R2 diffèrent pour les deux isotopes et exprimer le rapport R1 /R2 en fonction du rapport des masses ml /m2.

Le faisceau réfléchi est-il enrichi en isotope le plus lourd ou le plus léger?

Exercice 4 : Effet tunnel
On considère une particule de masse m dans le potentiel V(x) représenté sur la figure ci-dessous. On s'intéresse aux états de la particule pour lesquels son énergie E est 0 <E < Vo.



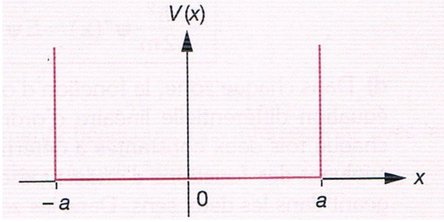
1. On considère la particule classique. Décrire son comportement lorsqu'elle arrive depuis x < 0 avec une vitesse v sur cette barrière de potentiel.
2. La particule est maintenant considérée quantique, et on s'intéresse aux états stationnaires décrits par une fonction d'onde spatiale $\phi(x)$. Quelle est l'équation vérifiée par $\phi(x)$? Donner la solution générale de cette équation dans chacune des trois zones, en introduisant les constantes

$$k_1=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{et} \quad k_2=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

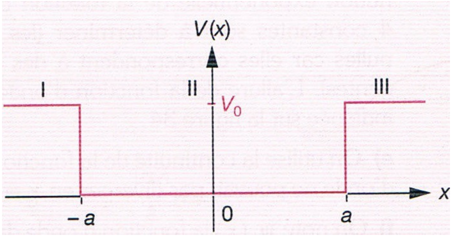
3. Que dire des valeurs de cette fonction et de sa dérivée en x = 0 et x = a? Exprimer ces conditions. Combien cela fait-il d'équations et d'inconnues à trouver?
4. Comment sont définis les coefficients de probabilité de réflexion R et de transmission T dus à la barrière de potentiel?
5. On peut montrer que $T=[1+(\frac{k_1{}^2+k_2{}^2}{2k_1k_2}sh(k_2a))^2]^{-1}$
Donner et interpréter la relation entre R et T. Exprimer T en fonction de E, V0, m, a et $\hbar$ lorsque la barrière est large et interpréter.
6.Un faisceau d'électrons, correspondant à une intensité I=0, 1 mA, est envoyé sur une barrière de potentiel de largeur a = 1,0 nm et de hauteur Vo =2 eV. L'énergie cinétique d'un électron incident est E= 1,0 eV.
On se place dans l'approximation d'une barrière épaisse?
a- Estimer l'intensité du courant tunnel qui émerge de l'autre côté de la barrière.
b-Toutes choses égales par ailleurs, on remplace les électrons par des protons. Déterminer la nouvelle valeur de l'intensité du courant tunnel qui émerge de l'autre côté de la barrière.

Masse d'un électron : $m=9{,}1.10^{-31}kg$ Masse d'un proton : $m=1{,}67.10^{-27}kg$

Exercice 5 :puits rectangulaire fini .
1- Une particule de masse m est placée dans un puit de potentiel infini V(x) = 0 pour - a <x <a 30), la zone extérieure étant inaccessible (V(x) = + ∞)



Retrouver le plus simplement possible les niveaux d'énergie des états stationnaires.
2-Le puits de potentiel est désormais modélisé de manière moins sommaire: l'énergie potentielle est toujours nulle sur [-a , a], mais vaut V(x) =Vo > 0 en dehors .



a) On s'intéresse aux état liés. Quelles sont les valeurs limites possibles de l'énergie?

On pose $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $K=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

b) Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les différentes zones,

c) Combien de constantes interviennent dans les amplitudes? Lesquelles peut-on déjà éliminer?

d) Quelles sont les différentes conditions aux limites utilisables?

e) Vu la forme du potentiel, on admet que les fonctions d'onde des états stationnaires sont soit paires, soit impaires. En déduire la relation ka tan (k a) = K a ou kacotan (k a) = - Ka.

f) Etablir la relation $(ka)^2+(Ka)^2=\frac{2ma^2 V_0}{\hbar}$

g) Interpréter graphiquement les solutions dans le plan de coordonnées (k a, Ka) à l'aide de la figure ci-dessous où les courbes 1 représentent X tanX et les courbes 2 $-$X cotan X .

h) Dans le cas où le puit devient très profond retrouver les solutions du 1 .