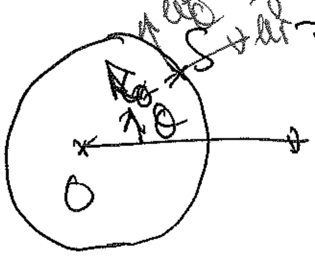
Ex : Accélération radiale d'un satellite.

1a - Orbite circulaire.



Th. du moment cinétique en O appliqué au satellite.

$$\frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} = \vec{OS}\wedge\vec{F} = \vec{0} \quad \text{avec } \vec{F} = -\frac{GM_t m_s}{r_0^2}\vec{u_r}$$

$$\vec{\sigma_O} = \vec{cst} = \vec{OS}\wedge m_s\vec{v_S} = m_s r_0^2\dot\theta\,\vec{u_z} \Rightarrow \dot\theta = cste$$

mvt circulaire uniforme

$$\vec{v_S} = v_0\vec{u_\theta} = r_0\dot\theta\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a_S} = -v_0\dot\theta\,\vec{u_r} = -r_0\dot\theta^2\vec{u_r} = -\frac{v_0^2}{r_0}\vec{u_r}.$$

TRD appliqué à S dans le référentiel géocentrique

$$-m_s\frac{v_0^2}{r_0} = -\frac{GM_t m_s}{r_0^2}$$

Or $g = \frac{GM_t}{R^2} \Rightarrow GM_t = gR^2$

$$v_0^2 = g\frac{R^2}{r_0} \Rightarrow \boxed{v_0 = R\sqrt{\frac{g}{r_0}}}$$

b - $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{R\sqrt{g}}$

A.N : $v_0 = 3879\ m.s^{-1}$

$r_0 = \left(\frac{T_0 R\sqrt{g}}{2\pi}\right)^{2/3} = 26\,672\ km.$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1,45.10^{-4}\ rad.s^{-1}$

2 - Etude de M dans (R_S) : (R_S) non galiléen en rotation uniforme $/(R_g)$.

2 - Actions mécaniques s'exerçant sur m :

→ attraction terrestre : $-\frac{G M_t m}{(r_0+l_0+x)^2}\,\vec{e_x}$

$= -\frac{g R^2 m}{(r_0+l_0+x)^2}$

→ force de rappel du ressort : $-kx\,\vec{e_x}$

→ réaction du support $\vec{R}$ t.q. $\vec{R}\cdot\vec{e_x} = 0$.

→ force d'inertie d'entraînement.

$\vec{F_{ie}} = m\,\omega_0^2(r_0+l_0+x)\,\vec{e_x}$

$\left(\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} \quad \vec{a_e} = \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OM}) + \vec{a}_{S/(R_g)}\right)$.

→ force d'inertie de Coriolis :

$\vec{F_{ic}} = -2m\,\omega_0\,\vec{e_z}\wedge\dot{x}\,\vec{e_x}$.

$\vec{F_{ic}} = -2m\,\omega_0\,\dot{x}\,\vec{e_y}$.

TRD projeté sur $\vec{e_x}$:

$$m\ddot{x} = -kx + m\,\omega_0^2(r_0+l_0+x) - \frac{g R^2 m}{(r_0+l_0+x)^2}$$

$$\boxed{\ddot{x} + (\omega_1^2-\omega_0^2)x - \omega_0^2(r_0+l_0) + \frac{g R^2}{(r_0+l_0+x)^2} = 0}$$

<u>Autre méthode</u> : étude énergétique.

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{m g R^2}{(r_0+x+l_0)} - \frac{1}{2}m\,\omega_0^2(r_0+l_0+x)^2 + K$$

$$\delta W_{ie} = m\,\omega_0^2(r_0+l_0+x)\,dx = -d\left(-\frac{1}{2}m\,\omega_0^2(r_0+l_0+x)^2 + K\right)$$

$E_m = $ cste.

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x + \frac{m g R^2}{(r_0+x+l_0)^2}\dot{x} - m\,\omega_0^2(r_0+l_0+x)\dot{x} = 0.$$

b - $\begin{matrix} x \\ l_0 \end{matrix} \ll r_0$.

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega_0^2)x - \omega_0^2(r_0 + l_0) + \frac{gR^2}{(r_0+l_0)^2}\left(1 + \frac{x}{r_0+l_0}\right)^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega_0^2)x - \omega_0^2(r_0 + l_0) + \frac{gR^2}{(r_0+l_0)^2} - \frac{2gR^2}{(r_0+l_0)^2}x = 0$$

or $\omega_0^2 = \frac{R^2 g}{r_0^3}$ $\quad \omega_0^2 r_0 = \frac{gR^2}{r_0^2}$

$l_0 \ll r_0$

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega_0^2)x \underbrace{- \omega_0^2 r_0 + \frac{gR^2}{r_0^2}}_{0} - 2\omega_0^2 x = 0$$

$$\underline{\ddot{x} + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2)x = 0}$$

c - $\frac{3\omega_0^2}{\omega_1^2} = 7.10^{-5} \ll 1$

$T \simeq \frac{2\pi}{\omega_1}$ période identique à celle sur terre