DM SCIENCES PHYSIQUES N°12

Problème 1 :

On cherche à déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie d'un système atomique dans son état de plus basse énergie (état fondamental) en tenant compte des contraintes quantiques.
On considère un modèle d'atome d'hydrogène où l'électron en interaction avec le proton comme noyau est décrit par la fonction d'onde suivante : $\Psi(\vec{r})=A \quad pour\, r<r_0 \quad et \quad \Psi(\vec{r})=0 \quad pour\, r>r_0$
où $r=\|\vec{r}\|$ est le module du vecteur position de l'électron et A est une constante. Le noyau, quant à lui, est supposé localisé en r = 0.

1- Rappeler l'interprétation physique de la fonction d'onde $\Psi(\vec{r})$ et en déduire que la valeur de la constante A (à une phase près) vaut $A=\sqrt{\dfrac{3}{(4\pi r_0^3)}}$.

2- Déterminer la valeur moyenne de la position $\langle\vec{r}\rangle$ et du carré de la distance $\langle\|\vec{r}\|^2\rangle$. Montrer alors que la « dispersion en position » définie par la relation $\Delta r=\sqrt{\langle\|\vec{r}\|^2\rangle-\|\langle\vec{r}\rangle\|^2}$ vaut $\Delta r=\sqrt{\dfrac{3}{5}}r_0$.

3- Par analogie avec la fonction d'onde spatiale $\Psi(\vec{r})$, on introduit la fonction d'onde en quantité de mouvement, $\chi(\vec{p})$ pour décrire la densité de probabilité dans l'espace des quantités de mouvement. On admet que la fonction d'onde en quantité de mouvement $\chi(\vec{p})$,vérifie :
$\chi(\vec{p})=B \quad pour\; p<p_0 \quad et \quad \chi(\vec{p})=0 \quad pour\; p>p_0$ où p désigne le module de $\vec{p}$, B est une constante et p_0 un paramètre ajustable que nous déterminerons un peu plus loin. Par analogie avec la notion de fonction d'onde spatiale, proposer une interprétation du carré dumodule de la fonction d'onde $\chi(\vec{p})$.

4- En travaillant en analogie avec les résultats relatifs au vecteur position, calculer la constante B et la « dispersion en quantité de mouvement » Δp

5- En vous appuyant sur l'inégalité spatiale d'Heisenberg généralisée au cas 3D en géométrie sphérique, justifier que si l'électron est dans son état fondamental (c'est-à-dire de plus basse énergie) on doit avoir, en ordre de grandeur, la relation $\dfrac{3}{5}p_0 r_0\approx\hbar$.

Remarque: on a gardé le facteur 3/5 par cohérence avec les calculs précédents mais celui-ci ne signifie rien d'un point de vue quantitatif sur le résultat final.

6- Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'un électron dans le champ électrique créé par le noyau lorsque celui-ci se trouve à la distance r du noyau . On notera $e^2=\dfrac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$ où q_e est la charge élémentaire.

On cherche l'expression de la valeur a_0 du paramètre r_0 qui minimise l'énergie moyenne de l'électron (état fondamental).

7- Montrer que l'énergie potentielle moyenne $\langle E_p\rangle$ de l'électron décrit par la fonction d'onde $\Psi(\vec{r})$ s'écrit $\langle E_p\rangle=\dfrac{-3}{2}\dfrac{e^2}{r_0}$ où $e^2=\dfrac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$ q_e étant la charge élémentaire.

8- Montrer de même que l'énergie cinétique moyenne $\langle E_c\rangle$ de l'électron décrit par la fonction d'onde $\chi(\vec{p})$ s'écrit $\langle E_c\rangle=\dfrac{3}{10}\dfrac{p_0^2}{m}$.

9- En éliminant p_0 grâce à la relation obtenue à la question 5, établir l'expression de $\langle E_m\rangle$ en fonction de $r_{0,} m, \hbar\, et\, e^2$.

10- En déduire que la « taille » de la l'atome d'hydrogène a pour expression $a_0\approx\dfrac{\hbar^2}{me^2}$

11- Effectuer l'application numérique. Commenter.

Données : charge élémentaire : $q_e=1{,}6.10^{-19}\,C$ masse de l'électron : $m=9{,}1.10^{-31}\,kg$

constante de Planck réduite $\hbar=1{,}05.10^{-34}\,J.s$ et $e^2=\dfrac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}=2{,}3.10^{-28}\,J.m$

Problème 2 : Effet Hall quantique

Document 4 - Effet Hall classique

En 1879, Edwin Hall découvre que lorsqu'un courant électrique I traverse un barreau conducteur plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, il apparaît une différence de potentiel, appelée tension Hall et notée U_H, dans la direction perpendiculaire au courant et au champ (**figure 8**). Son origine est la force que le champ magnétique exerce sur les porteurs de charge qui participent au courant (force de Lorentz).

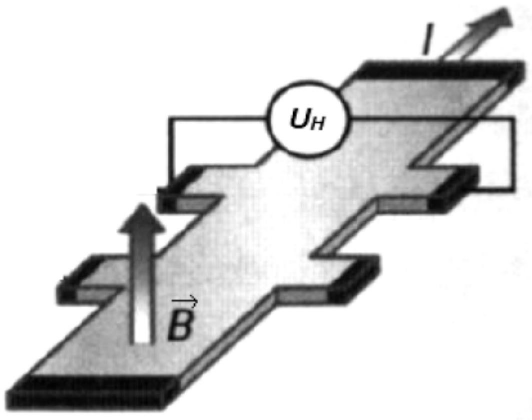


Figure 8 - Mesure de la tension de Hall

Dans les conducteurs usuels, U_H vérifie alors la relation : $U_H = R_H I$ avec R_H la résistance Hall.

De plus, la résistance Hall R_H est proportionnelle à la norme du champ $\vec{B}$ et à l'inverse du nombre n_v de porteurs de charge par unité de volume. L'effet Hall fournit donc un moyen de mesure du nombre de porteurs de charges, utilisé en particulier pour caractériser les matériaux semiconducteurs. Il est aussi à la base du fonctionnement des dispositifs les plus couramment utilisés pour la mesure des champs magnétiques.

Source : Gilbert Pietryk, *Panorama de la Physique*, 2007

Document 5 - Résistance de Hall en fonction du champ magnétique

Klaus Von Klitzing et ses collaborateurs ont montré qu'à la température de l'hélium liquide (4 K), la résistance Hall d'un tel système présente une dépendance en champ magnétique très particulière. Au lieu de la variation linéaire classique, elle suit un comportement en marches d'escalier (**figure 11**).

La valeur de la résistance Hall sur les plateaux observés vaut $\frac{1}{p}\frac{h}{e^2}$ où p prend des valeurs entières ($R_H = 25{,}812\ \text{k}\Omega$ pour $p = 1$), e est la charge électrique élémentaire et h la constante de Planck.

Ce résultat est très remarquable puisqu'il relie la résistance de Hall sur les plateaux à deux constantes fondamentales sans aucun facteur dépendant des caractéristiques de l'échantillon. Il est maintenant vérifié de manière tellement reproductible, avec une précision relative de l'ordre de 10^{-10}, que l'effet Hall quantique fournit depuis 1990 l'étalon standard de résistance électrique.

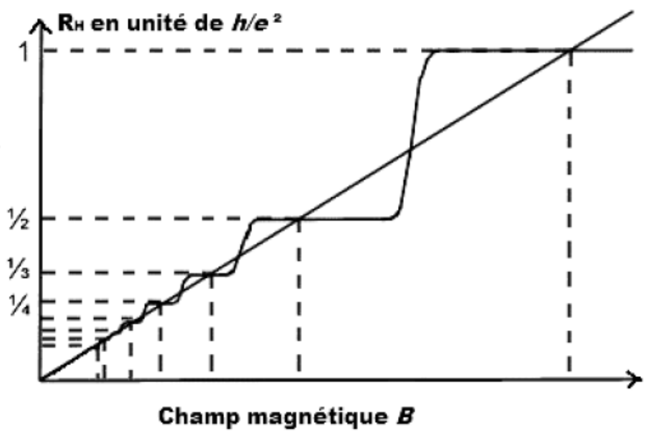


Figure 11 - Résistance de Hall d'un gaz bidimensionnel d'électrons

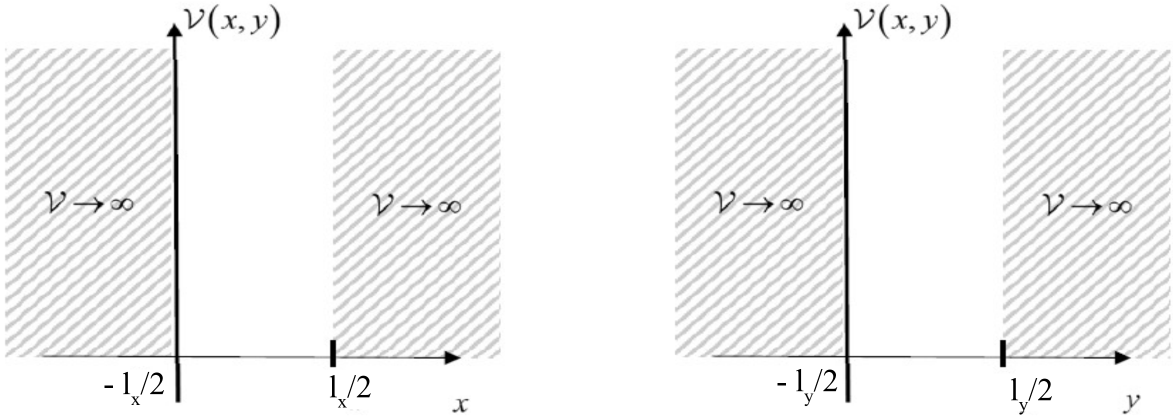
Source : Gilbert Pietryk, *Panorama de la Physique*, 2007

I- Modèle sans champ magnétique :

On considère les électrons mobiles dans le barreau comme un gaz de particules quantiques libres de masse m n'interagissant pas entre-elles et confinées dans une structure cristalline particulière qui ne leur permet de se déplacer que sur une distance l_x selon $\vec{u}_x$ et l_y selon $\vec{u}_y$.

On assimile cette situation à un puits de potentiel infini bidimensionnel défini par :

$$V(x,y)=0 \quad si \quad -\frac{l_x}{2}<x<\frac{l_x}{2} \quad et \quad -\frac{l_y}{2}<y<\frac{l_y}{2} \quad \text{et} \quad V(x,y)\to\infty \quad \text{sinon}$$



1- On suppose les directions *x* et *y* indépendantes de sorte à pouvoir traiter le problème à une seule dimension suivant x dans un premier temps. Rappeler l'inégalité de Heisenberg reliant l'indétermination quantique sur la position x et sur la quantité de mouvement p_x .

Montrer que l'énergie minimale E_{xmin} au fond du puits pour le confinement selon x est donnée par :

$E_{xmin}=\dfrac{\hbar^2}{8ml_x^2}$. Comparer au cas classique d'une particule qui serait confinée au fond d'un puits.

On passe à une description en 2D .

On étudie les états stationnaires du quanton caractérisés par la fonction d'onde :

$$\Psi(x,y,t)=\Phi(x,y)\exp(-i\,\frac{E}{\hbar}t) \quad \text{avec} \quad \Phi(x,y)=X(x)Y(y)$$

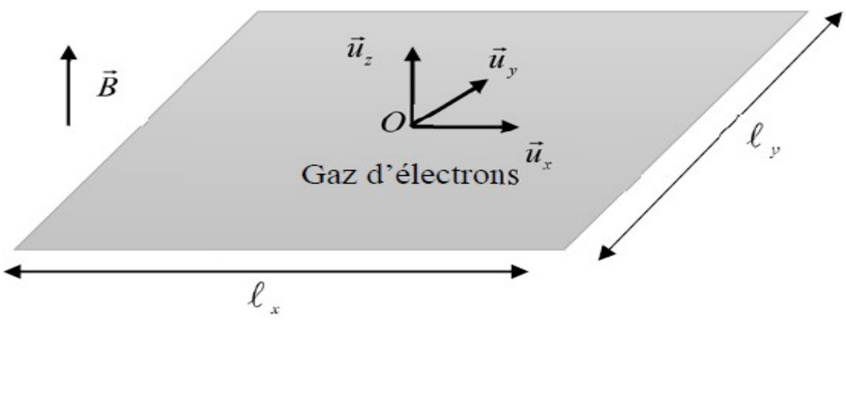
2- Donner la signification de la fonction d'onde . Quelle probabilité permet-elle d'expliciter ?

Montrer que l'énergie du quanton est alors quantifiée par les deux nombres entiers positifs non nuls

$n_x\, et\, n_y$ tels que : $E(n_x,n_y)=\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2\text{m}}[(\dfrac{n_x}{l_x})^2+(\dfrac{n_y}{l_y})^2]$

II- Modélisation en présence d'un champ magnétique :

On impose maintenant un champ magnétique $\vec{B}=B\vec{u}_z$ (B > 0) uniforme et indépendant du temps dans tout le puits bidimensionnel. On étudie toujours les états stationnaires du quanton d'énergie E.



Il faut alors modifier l’équation de Schrödinger spatiale qui devient :

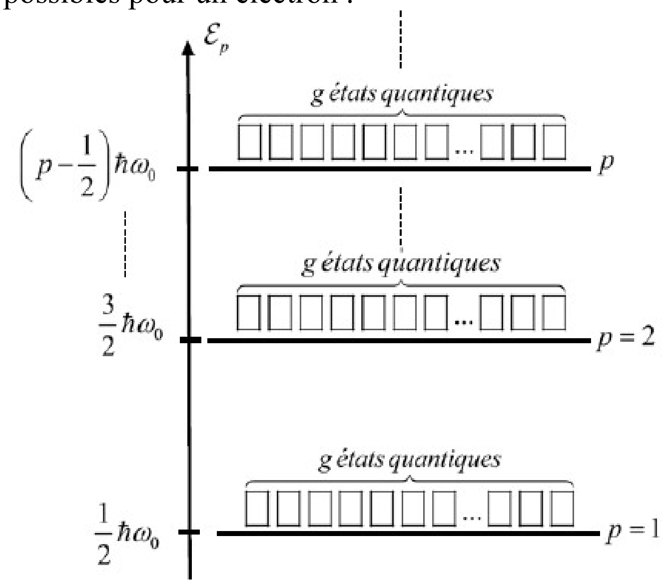
$$\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\Phi+i\frac{\hbar e B}{m}x\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{e^2B^2}{2\mathrm{m}}x^2\Phi$$

2- On propose d’étudier la solution $\Phi(x,y)=\Omega(x)\exp(i k_y y)$. Montrer que l’équation de Schrödinger précédente se réduit à : $\frac{-\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{d^2\Omega}{dx^2}+V_{eff}(x)\Omega(x)=E\,\Omega(x)$

où $V_{eff}(x)$, énergie potentielle effective, est à exprimer en fonction de $m, \omega_0 et\, x_0$ avec $\omega_0=\frac{e B}{m}$ et $x_0=\frac{\hbar k_y}{eB}$ où k_y vérifie la condition de quantification de l’étude sans champ magnétique.

3- Quel système physique possède une telle énergie potentielle ?
La modélisation impose que x_0 soit située dans le puits de potentiel. Quelle est alors la valeur maximale $n_y^{max}=g$ de n_y ? Si on ne prend pas en compte l'effet de spin, g est la dégénérescence de l’état d’énergie E c'est à dire le nombre d'états d'énergie E .

4- L’équation précédente vérifiée par $\Omega(x)$ ne possède de solution que pour des valeurs quantifiées de l’énergie $E_p=(p-\frac{1}{2})\hbar\omega_0$ avec p ∈N. Chaque niveau d’énergie est dégénéré g fois c'est à dire qu'il contient g états quantiques possibles pour un électron .



Le système considéré est toujours le gaz d’électrons contenant N_e électrons dans une forme parallélépipédique de hauteur b de longueur l_x et de largeur l_y . Ce système est en équilibre avec un thermostat à la température *T*. Le remplissage des niveaux se fait toujours par énergie croissante.

5- Exprimer N_e à l’aide de la densité volumique n_v d’électrons supposée uniforme et des caractéristiques géométriques du système considéré.

6- Proposer une condition sur N_e pour que les électrons puissent occuper au plus p niveaux d’énergies. En déduire que le champ appliqué doit satisfaire à la condition : $B\geq B_p=\frac{1}{p}\frac{n_v h b}{e}$.

7- Exprimer alors la résistance Hall correspondante $R_H=\frac{B_p}{n_v e b}$ en fonction du rapport $\frac{h}{e^2}$. Le modèle théorique utilisé concorde-t-il avec les observations expérimentales .

8- Proposer une justification de la température choisie par Klaus Von Klitzing (autour de 4 K) pour observer l’effet Hall quantique.