III L'oscillateur harmonique en physique quantique : (13)

14 – $\Psi(x,t) = f(x)\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar} f(x)\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

En réinjectant dans l'eq de Schrödinger et en simplifiant par $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{2}k x^2 f(x) = E f(x)$$

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}k x^2\right) f(x) = 0} \quad (I)$$

15 – $\alpha = x\left(\frac{\mu k}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

$[k] = [E].L^{-2}$ $\quad [E] = M.L^2.T^{-2}$

$[\hbar] = [E].T$

$$[\alpha] = L \times \left(\frac{M.L^{-2}}{M\,L^2 T^{-2} T^2}\right)^{1/4}$$

(14)

$$[\alpha] = L \times \left(\frac{1}{L^4}\right)^{1/4}$$

α est sans dimension.

$$\gamma = \left(\frac{4\mu E^2}{\hbar^2 k}\right)^{1/2}$$

$$[\gamma] = \left(\frac{M}{T^2 . M . T^{-2}}\right)^{1/2}$$

γ sans dimension.

Rem : ne pas confondre unités $m.s^{-1}$, J, ... par ex et dimensions M, L, T ...

16 – $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx} = \left(\frac{\mu k}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{df}{d\alpha}$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{d\alpha}{dx} = \left(\frac{\mu k}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2 f}{d\alpha^2}$$

L'équation I devient :

$$\left(\frac{\mu k}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2 f}{d\alpha^2} + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{k\mu}{\hbar^2}x^2\right) f(\alpha) = 0$$

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2} + \left(\frac{2\mu^{1/2} E}{k^{1/2}\hbar} - \frac{(k\mu)^{1/2}}{\hbar}x^2\right) f(\alpha) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 f}{d\alpha^2} + (\gamma - \alpha^2) f(\alpha) = 0} \quad (II)$$

(15)

17 - Pour $\alpha \to \pm\infty$, l'eq précédente devient $\alpha^2 \gg \gamma$:

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2} - \alpha^2 f(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) \simeq e^{\pm\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\frac{df}{d\alpha} \simeq \pm\alpha\, e^{\pm\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2} = \pm e^{\pm\frac{\alpha^2}{2}} + \alpha^2 e^{\pm\frac{\alpha^2}{2}} \simeq \alpha^2 e^{\pm\frac{\alpha^2}{2}}$$

On a bien $\frac{d^2 f}{d\alpha^2} \simeq \alpha^2 f(\alpha)$ pour $\alpha \gg 1$

18 - Pour $f(\alpha) = e^{\frac{1}{2}\alpha^2}$

quand $\alpha \to \infty$, $f(\alpha) \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

donc $|\psi(x,t)|^2$ tendrait vers l'∞

~~or~~ $|\psi(x,t)|^2$ représente la densité de probabilité de présence qui ne peut pas diverger d'où <u>seule la solution $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ est physiquement acceptable.</u>

(16)

$$f(\alpha) = g(\alpha)\, e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

19 - $\frac{df}{d\alpha} = \left(\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} - \alpha\, g(\alpha)\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2} = \left(\frac{d^2 g}{d\alpha^2} - g(\alpha) - \alpha\frac{dg}{d\alpha} - \alpha\frac{dg}{d\alpha} + \alpha^2 g(\alpha)\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2} = \left(\frac{d^2 g}{d\alpha^2} - 2\alpha\frac{dg}{d\alpha} + (\alpha^2 - 1)\, g(\alpha)\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

En réinjectant les expressions de $f(\alpha)$ et $\frac{d^2 f}{d\alpha^2}$ dans l'équation II) on obtient :

$$\frac{d^2 g}{d\alpha^2} - 2\alpha\frac{dg}{d\alpha} + (\alpha^2 - 1)\, g(\alpha) + (\gamma - \alpha^2)\, g(\alpha) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 g}{d\alpha^2} - 2\alpha\frac{dg}{d\alpha} + (\gamma - 1)\, g(\alpha) = 0} \quad \text{III}$$

$$\boxed{g(\alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p\, \alpha^p}$$

20 - $g(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \dots + b_k\alpha^k + \dots$

$$\frac{dg}{d\alpha} = b_1 + 2b_2\alpha + \dots + k b_k \alpha^{k-1} + \dots$$

$$\alpha\frac{dg}{d\alpha} = \alpha b_1 + 2b_2\alpha^2 + \dots + k b_k \alpha^k$$

$$\boxed{\alpha \frac{dg}{d\alpha} = \sum_{p=0}^{\infty} p\, b_p \alpha^p}$$

$$\frac{d^2g}{d\alpha^2} = 2b_2 + 3b_3\alpha^2 + \dots + k(k-1)b_k\alpha^{k-2}$$

En effectuant le changement d'indice $p = k-2$ le terme $k(k-1)b_k\alpha^{k-2}$ devient $(p+2)(p+1)\alpha^p b_{p+2}$, $\frac{d^2g}{d\alpha^2}$ peut alors s'écrire.

$$\boxed{\frac{d^2g}{d\alpha^2} = \sum_{p=0}^{\infty} (p+2)(p+1) b_{p+2} \alpha^p}$$

En réinjectant les expressions ci-dessus dans l'eq III, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left((p+2)(p+1)b_{p+2} - 2p b_p + (\gamma-1)b_p\right)\alpha^p = 0 \quad \underline{\forall \alpha}$$

D'où $(p+2)(p+1)b_{p+2} - (2p-\gamma+1)b_p = 0$

$$\boxed{b_{p+2} = \frac{2p-\gamma+1}{(p+2)(p+1)} b_p}$$

2) - Soit n le plus grand entier t-q $b_n \neq 0$

D'où $b_{n+2} = 0 = \frac{2n-\gamma+1}{(n+2)(n+1)} b_n$

D'où $2n - \gamma + 1 = 0$

D'où $\gamma = 2n+1$

$$\gamma^2 = (2n+1)^2 = \frac{4\mu E_n^2}{\hbar^2 k}$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$\boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}}$$

ω correspond à la pulsation propre d'un oscillateur harmonique constitué d'un ressort de raideur k à l'extrémité duquel est fixé un point de masse μ.