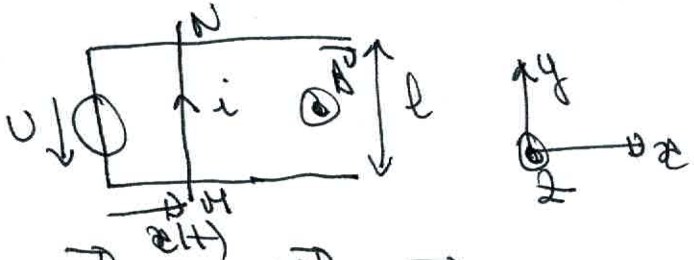
QCM em.

I –



1 – $d\vec{F_L} = i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$

$\vec{F_L} = i\,\vec{MN}\wedge\vec{B} = i\ell B_0\,\vec{e_x}$

réponse A.

2 – TRD appliqué à la barre projeté sur $\vec{e_x}$

$\rho\ell\ddot{x} = i\ell B_0$

$\boxed{\ddot{x} = \frac{iB_0}{\rho}}$ (1) réponse D

3 – $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

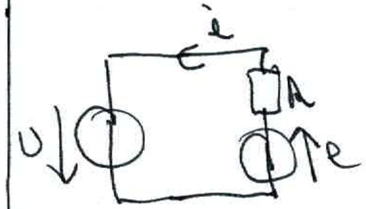
$\vec{dS} = dS\,\vec{e_z}$

$\Phi(t) = B_0 x(t)\ell$

$e = -B_0\ell\dot{x}$ réponse A

Autre dém: pendant dt Φ varie de $d\Phi = B_0\ell\,dx$ $e = -B_0\ell\frac{dx}{dt}$

4 – Schéma électrique équivalent



$U + e = Ri$

$U = Ri + B_0\ell\dot{x}$ (2)

Réponse C

5 – $i = \frac{U - B_0\ell\dot{x}}{R}$

D'où: $\ddot{x} = -\frac{B_0^2\ell}{R\rho}\dot{x} + \frac{B_0U}{\rho R}$

$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{B_0U}{\rho R}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{\rho R}{B_0^2\ell}}$

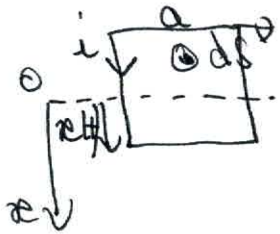
(2) ⇒ $\dot{x} = \frac{U}{B_0\ell} - \frac{R}{B_0\ell}i$

$\ddot{x} = -\frac{R}{B_0\ell}\frac{di}{dt} = \frac{iB_0}{\rho}$

$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0}$ Réponse A

Partie II :

1 - Flux de $\vec{B}$ à travers une spire du cadre à t : $\varphi(t) = B_0 a x(t)$



A travers les n spires :

$\Phi(t) = B_0 n a x(t)$

$e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -B_0 n a \dot{x}(t)$ réponse C

2 - Les forces de Laplace s'exerçant sur les 2 parties verticales immergées dans $\vec{B}$ sont opposées donc la résultante correspond à la force s'exerçant sur le segment MN

$\vec{F_L} = i\,\vec{MN} \wedge \vec{B} = i a B_0 \vec{e_x}$

Comme il y a n spires :

$\vec{F_L} = n a i B_0 \vec{e_x}$ réponse A

3 - TRD appliqué au cadre projeté sur $\vec{e_x}$

$m\ddot{x} = n a i B_0 + mg$

$\dfrac{dv_x}{dt} = g + \dfrac{n a B_0}{m} i(t)$ (1)

Schéma électrique équivalent

$e = -B_0 n a v_x(t) = Ri + L\dfrac{di}{dt}$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $i(t) = \dfrac{m}{n a B_0}\dfrac{dv_x}{dt} - \dfrac{mg}{n a B_0}$

En réinjectant dans l'eq (2), on obtient :

$-B_0 n a v_x(t) = \dfrac{mR}{n a B_0}\dfrac{dv_x}{dt} - \dfrac{mgR}{n a B_0} + \dfrac{mL}{n a B_0}\dfrac{d^2v_x}{dt^2}$

D'où :

$\dfrac{d^2v_x}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dv_x}{dt} + \dfrac{n^2a^2B_0^2}{mL} v_x(t) = \dfrac{Rg}{L}$

$\tau = \dfrac{L}{R}$ $\quad \omega_0^2 = \dfrac{n^2a^2B_0^2}{mL}$

AN : $\tau = 1\,ms$ réponse A

4 – $\boxed{\omega_0 = \dfrac{n a B_0}{\sqrt{m L}}}$ réponse A

5 – En négligeant l'autoinduction $L \to 0$

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{n^2 a^2 B_0^2}{mR} v_x(t) = g$$

$\boxed{\tau' = \dfrac{mR}{n^2 a^2 B_0^2}}$ réponse A

6 – La vitesse limite correspond à la solution particulière de l'équation précédente :

$\boxed{v_l = \dfrac{mgR}{n^2 a^2 B_0^2}}$

$v_l = 0{,}8\ m.s^{-1}$ soit $80\ cm.s^{-1}$

réponse B

7 – Bilan de puissance :

$$e = -B_0 n a v_x = Ri + L\frac{di}{dt} \quad (E)$$

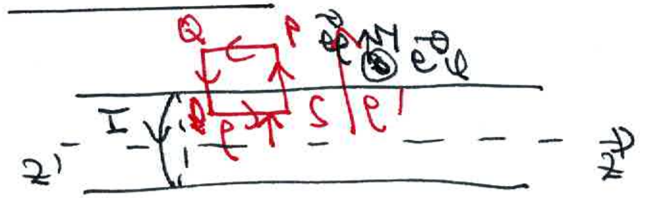
$$m\frac{dv_x}{dt} = n a i B_0 + mg \quad (M)$$

Pour obtenir le bilan de puissance, on écrit $(E)i - (M)v_x$

$$-m v_x \frac{dv_x}{dt} = Ri^2 + L i \frac{di}{dt} - mg v_x .$$

$$\underbrace{mg v_x}_{\text{puissance fournie par le poids}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v_x^2\right)}_{\text{puissance cinétique}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right)}_{\text{puissance magnétique}} + \underbrace{Ri^2}_{\text{puiss Joule}}$$

Partie III :



1 – Plan $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ plan de symétrie
réponse A.

– $\vec{B}$ orienté selon $\vec{e}_z$, $\perp$ aux plans de symétrie.

2 – Contour d'ampère = rectangle ci-dessus réponse D.

3 – Invariance par rotation autour de $(z'z)$ et par translation selon $(z'z)$

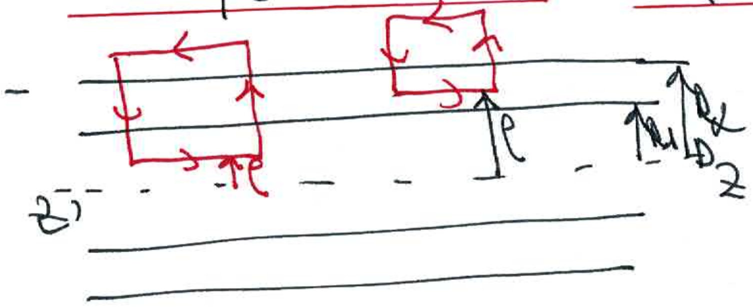
$$\vec{B}(M) = B(\rho)\,\vec{e}_z$$

Le champ à l'ext. est nul.

$$\oint_{PQRSP} \vec{B}\cdot\vec{dl} = B(\rho)\,h = \mu_0 n h I$$

$$\vec{B} = \mu_0 n I\,\vec{e}_z$$ réponse C.

4 –



même contour que ci-dessus

Pour $\rho < R_1$:

$$B(\rho)\,h = \mu_0 n h\, m (R_2 - R_1) I$$

$$B(\rho < R_1) = \mu_0 n\, m (R_2 - R_1) I$$

réponse B

5 – Pour $R_1 < \rho < R_2$:

$$B(\rho)\,h = \mu_0 n h\, m (R_2 - \rho) I$$

$$B(R_1 < \rho < R_2) = \mu_0 n\, m (R_2 - \rho) I$$

continuité en $\rho = R_1$ vérifiée.

Réponse C – B.

Partie IV :

1- Chaque tronçon dz de conducteur 1 et 2 porte des charges opposées.

$dQ_1 = \sigma 2\pi R_1 dz = -dQ_2 = -\sigma' 2\pi R_2 dz$

$$\boxed{\sigma' = -\frac{R_1}{R_2}\sigma}$$

réponse B.

2- Plans $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ et $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ sont plans de symétrie $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_\rho$

De plus, il y a invariance par translation le long de $(z'z)$ et par rotation autour de $(z'z)$ d'où

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_\rho}$$

On applique le th. de Gauss en choisissant comme surface de Gauss un cylindre de rayon ρ et de longueur H.

(S_L) = surface latérale du cylindre.

$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{(S_L)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_L} E(r)\vec{e}_\rho \cdot dS\,\vec{e}_\rho$

$= E(r)\, 2\pi r h$.

$r < R_1$: $Q_{int} = 0$ $\quad \vec{E} = \vec{0}$

$R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = \sigma 2\pi R_1 h$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_1}{r}\vec{e}_\rho}$$

On obtient bien $E = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \frac{\text{charge}}{\text{surface}}$

$r > R_2$: $Q_{int} = 0$

$\vec{E} = \vec{0}$

Réponses A et D.

(11)

3- La densité volumique d'énergie électrique dans la zone $R_1 < r < R_2$ vaut :

$$u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{r^2}$$

⚠ non uniforme

L'énergie contenue à l'int des volume contenu entre 2 cylindres de rayons r et $r+dr$ et de longueur L vaut :

$$dE_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{r^2}\, 2\pi r\, dr\, L$$

D'où

$$E_e = \frac{\sigma^2 \pi}{\varepsilon_0} R_1^2 L \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{E_e = \frac{\pi R_1^2 \sigma^2 L}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Réponse C.

4- Si on appelle Q_1 la charge portée par une longueur L de C_1

(12)

$$Q_1 = \sigma 2\pi R_1 L$$

$$E_e = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} = \frac{2\pi^2 R_1^2 L^2 \sigma^2}{2C}$$

$$C = \frac{2\pi^2 R_1^2 L^2 \sigma^2}{2} \times \frac{\varepsilon_0}{\pi R_1^2 \sigma^2 L \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$ bien de la forme $\varepsilon_0 \times$ longueur

Par unité de longueur :

$$\boxed{C_\ell = \frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

Réponse A.

5- Plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B} \perp$ à ce plan $\Rightarrow \vec{B} = B(M)\vec{e_\varphi}$

De plus invariance par translation le long de $(z'z)$ et par rotation autour de $(z'z)$

$$\vec{B} = B(r)\vec{e_\varphi}$$

13

On applique le th. d'Ampère sur un cercle de rayon r et d'axe $(z'z)$

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé}.$$

<u>$R_1 < r < R_2$</u> $\quad I_{enlacé} = I$

$$B(r)\, 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \qquad \text{réponse E}$$

<u>$r > R_2$</u> $\quad I_{enlacé} = I - I = 0$

$$\vec{B} = \vec{0}$$

6– $u_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ densité volumique d'en. magnétique

$$u_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$$dE_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\, 2\pi r\, dr\, L$$

$$\boxed{E_m} = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \boxed{\frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Réponse D

14

$$E_m = \frac{1}{2} L_{tot} I^2$$

$$L_{tot} = \frac{\mu_0 L}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Par unité de longueur.

$$\boxed{L_\ell = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad \text{réponse B.}$$

⑮

Partie IV :

1- $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ réponse D.

2- On intègre sur une surface ouverte (S) s'appuyant sur un contour fermé (C).

$$\boxed{\iint_{(S)} \vec{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

Réponse B.

3- Plan $(M; \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est plan de symétrie de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ - $\vec{E} \perp$ à ce plan. De plus invariance par rotation autour de $z'z$.

$\vec{E}(M,t) = E(r,z,t)\,\vec{u_\theta}$

On fait circuler (C) sur un cercle de rayon r.

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \oint E(r,t)\,\vec{u_\theta}\cdot d\ell\,\vec{u_\theta} = E(r,t)\,2\pi r$

$= -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 n I(t)\pi r^2\right)$

$E(r,t) = -\frac{\mu_0 n\, r}{2}\frac{dI}{dt}$

⑯

$$\boxed{E(r,t) = \frac{\mu_0 n \omega r}{2} I_0 \sin(\omega t)}$$

Réponse C.

4- $$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 \omega r}{2} I_0^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\vec{e_r}}$$

Réponse A.

5- $\langle w_m \rangle = \frac{\langle B^2\rangle}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2}{4}$) densité volumique

L'énergie totale magnétique moyenne vaut

$$\boxed{\langle W_m \rangle = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2}{4}\pi a^2 h}$$

réponse B.

6- densité volumique

$\langle w_e \rangle = \frac{\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle}{2} = \frac{\mu_0 n^2 \omega^2 r^2 I_0^2}{16 c^2}$

⚠ $\langle w_e \rangle$ non uniforme.

$\langle W_e \rangle = \int_0^a \underbrace{\frac{\mu_0 n^2 \omega^2 r^2 I_0^2}{16 c^2}\times 2\pi r h\,dr}_{\text{en. stockée entre 2 cylindres de rayons } r \text{ et } r+dr}$

$$\langle W_e \rangle = \frac{\mu_0 n^2 \omega^2 \pi I_0^2 h}{8 c^2} \int_0^a r^3 \, dr$$

$$\boxed{\langle W_e \rangle = \frac{\mu_0 n^2 \omega^2 \pi h}{32 c^2} a^4 I_0^2}$$ $\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$

Réponse B.

7- $$\boxed{\rho = \frac{\langle W_m \rangle}{\langle W_e \rangle} = \frac{8 c^2}{\omega^2 a^2}}$$

Réponse C

8- $$\rho = \frac{8 \times (3 \cdot 10^8)^2}{(2\pi \times 1000)^2 \times (10 \cdot 10^{-2})^2}$$

$\rho = 1{,}8 \cdot 10^{12}$ réponse D.

9- $P_J = \gamma E^2$

$$\boxed{P_J = \gamma \frac{\mu_0^2 n^2 \omega^2 r^2}{4} I_0^2 \sin^2(\omega t)}$$

Réponse A.

10- $$\langle p_J \rangle = \frac{\gamma \mu_0^2 n^2 \omega^2 I_0^2}{8} r^2$$

Puissance totale

$$\langle P_J \rangle = \int_0^b \langle p_J \rangle \, 2\pi r \, dr \, h$$

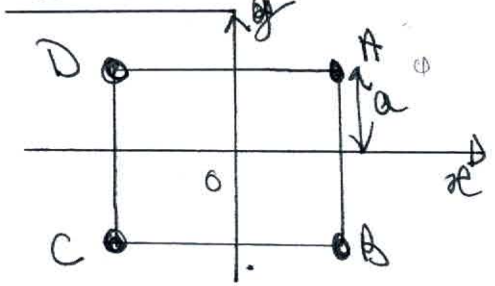
$$\langle P_J \rangle = \int_0^b \frac{\gamma \mu_0^2 n^2 \omega^2 \pi h}{4} I_0^2 r^3 \, dr$$

$$\boxed{\langle P_J \rangle = \frac{\gamma \mu_0^2 n^2 \omega^2 \pi h}{16} b^4 I_0^2}$$

Réponse D

11- Réponse B -

Partie V :

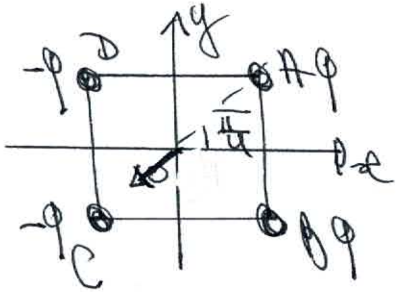


1- ~~Axes~~ (Oy) et (Ox) sont axes de symétries — $\vec{E}(O)$ ∈ à ces axes $\Rightarrow$ $\vec{E}(O) = \vec{0}$ réponse a

2- $V(O) = \dfrac{4q}{4\pi\varepsilon_0 OA} = \dfrac{q}{\pi\sqrt{2}\varepsilon_0 a}$

réponse c -

3-



Axe (Oy) axe d'antisymétrie $\vec{E}(O)$ ⊥ à cet axe $\Rightarrow$ selon $\vec{u}_x$

La particule en A crée un chp en O

$\vec{E}_A(O) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{AO}}{AO^3}$

$\vec{E}_A(O) \cdot \vec{u}_x = - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{2}a)^2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \vec{E}_B(O) \cdot \vec{u}_x$

La particule située en C crée en O un chp $\vec{E}_C(O) = \vec{E}_A(O)$

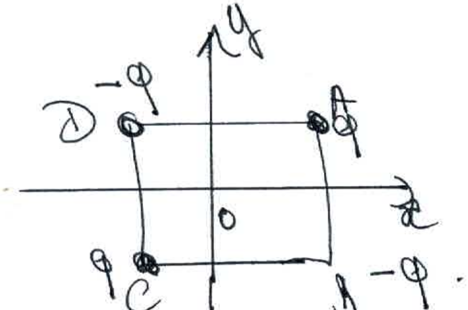
Au final $\vec{E} = (4 \vec{E}_A(O) \cdot \vec{u}_x) \vec{u}_x$

$\vec{E} = - \dfrac{\sqrt{2} q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \vec{u}_x$

$\boxed{\vec{E} = - \dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^2} \vec{u}_x}$ réponse c.

4- $V(O) = 0$ réponse a

5-



Axes (Ox) et (Oy) sont axes d'antisymétrie, $\vec{E}$ ⊥ à ces axes $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(O) = \vec{0}}$

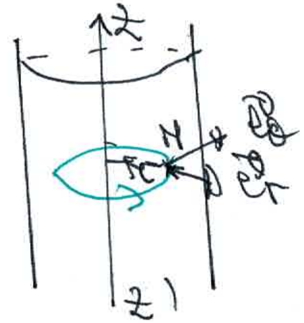
réponse a

6- $V(O) = 0$ réponse a -

7- Réponse d $F \cdot m^{-1}$

8- Réponse a -

Partie VII :



1- Réponse b - $\vec{B}(M) \perp$ aux plans de symétrie de la distribution de courant passant par M

Réponse c : Plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ plan de symétrie de la distribution de courant $\Rightarrow \vec{B} = B(M)\vec{e}_\theta$

2- Invariance par translation selon $\vec{e}_z$ et rotation d'angle θ $\Rightarrow$ $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$

Th. d'Ampère sur un cercle de rayon r

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B(r)\vec{e}_\theta \cdot dl\,\vec{e}_\theta = B(r)2\pi r = \mu_0 I_{enlacé}$$

Vecteur densité de courant

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2}\vec{e}_z$$

$r < R$ $\quad I_{enlacé} = j\pi r^2 = I\frac{r^2}{R^2}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\vec{e}_\theta}$$ réponse c

3- $r > R$ $\quad I_{enlacée} = I$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta}$$ réponse b

4- Réponse d

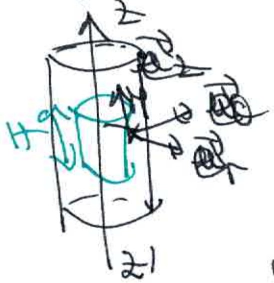
5- $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ H\cdot m^{-1}$

réponse c.

Partie VI :

1 – Réponses (a) et (d) MF et MG.

2 – Réponses (a) et (c)

3 – 

Plans $(M; \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $(M; \vec{e_r}, \vec{e_z})$ plans de sym.
Invariance par rotation autour de $(z'z)$ et translation selon $(z'z)$

$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e_r}$

Th. de Gauss appliqué sur un cylindre de rayon r et hauteur H.

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_L)} E(r)\vec{e_r} \cdot dS\vec{e_r} = E(r)2\pi r H$$

Surf. lat. du cyl.

<u>$r < R$</u>

$$E(r)2\pi r H = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \pi r^2 H$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r \vec{e_r}}$$ réponse b

4 – $r > R$ $\quad E(r)2\pi r H = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\pi R^2 H$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}\vec{e_r}}$$ réponse (c)

5 – $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r}$

<u>$r < R$</u> $\quad \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r$

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right)}$$ avec $V(R) = 0$

réponse (a)

6 – $r > R$

$$+\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}$$

$$\boxed{V(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R}\right)}$$ réponse (c)