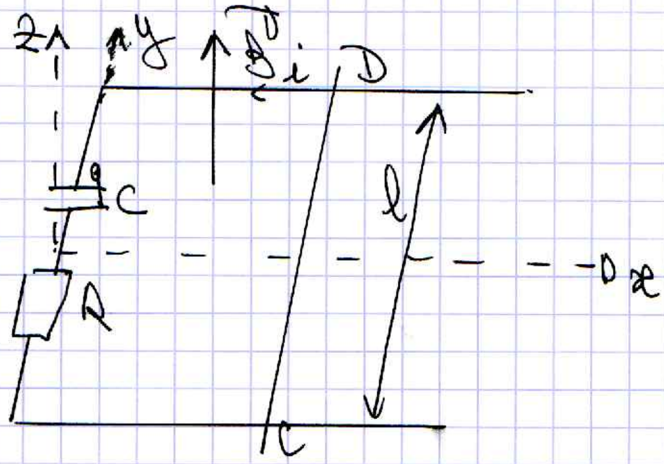
Ex 1 : rails Laplace.



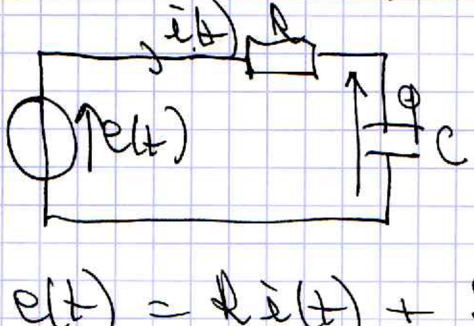
1 – Étude qualitative :

Barre x met en mvt ⇒ variation du flux de $\vec{B}$ ⇒ fem induit ⇒ circuit fermé ⇒ courant induit ⇒ force de Laplace s'exerçant sur la barre.

$\Phi(t) = B\,l\,x(t)$

$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\dot{x}$

Schéma électrique équivalent :



$e(t) = Ri(t) + \frac{q}{C}$ avec $i = \frac{dq}{dt}$

$\boxed{-Bl\dot{x} = Ri(t) + \frac{q}{C}}$ (1)

Force de Laplace $\vec{F} = i(t)\,\vec{CD} \wedge \vec{B}$

$\vec{F} = i(t)\,l\,B\,\vec{u_x}$.

TRD sur $\vec{u_x}$ appliquée à la barre

$$m\ddot{x} = i(t)\,\ell B \quad (2)$$

$$m(\dot{x}(t) - v_0) = (q(t) - 0)\,\ell B$$

$$(1) \Rightarrow q(t) = -B\ell C\dot{x} - RC\,i(t)$$

$$m(\dot{x}(t) - v_0) = -B^2\ell^2 C\,\dot{x} - RC\ell B\,i(t)$$

$$m(\dot{x}(t) - v_0) = -B^2\ell^2 C\,\dot{x} - RC\,m\ddot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{1}{RC} + \frac{B^2\ell^2}{mR}\right)\dot{x} = \frac{v_0}{RC}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\frac{v_0}{RC}}{\frac{1}{RC} + \frac{B^2\ell^2}{mR}} + A\,e^{-t/\tau}$$

avec $\boxed{\tau} = \dfrac{1}{\frac{1}{RC} + \frac{B^2\ell^2}{mR}} = \boxed{\dfrac{RC}{1 + \frac{B^2\ell^2 C}{m}}}$

$$\dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow A = v_0\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{B^2\ell^2 C}{m}}\right)$$

$$A = v_0\left(\frac{\frac{B^2\ell^2 C}{m}}{1 + \frac{B^2\ell^2 C}{m}}\right)$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{B^2\ell^2 C}{m}}\left(1 - \frac{B^2\ell^2 C}{m}\,e^{-t/\tau}\right)}$$

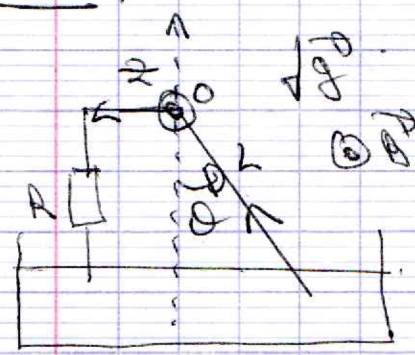
3 $-(1)\times i + (2)\times \dot{x}$

$$Ri^2 + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + m\dot{x}\ddot{x} = 0$$

$$Ri^2\,dt + \frac{1}{2C}\frac{dq^2}{dt}\,dt + \frac{1}{2}m\,dv^2 = 0$$

$$W_J = \frac{1}{2C}\left(\underset{0}{q^2(0)} - q_f^2\right) + \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - v_f^2\right)$$

Ex B



1 – Mvt de rotation de la barre ⇒ variaᵒ du flux ⇒ fem induite ⇒ action méca de Laplace.

Entre t et t+dt, θ varie de dθ, variation du flux de

$$d\Phi = \frac{1}{2} L^2 \, d\theta \, B$$

$$(E) \quad e = -\frac{1}{2} L^2 \frac{d\theta}{dt} B = R\, i(t)$$

2 – TMC à la barre

$$d\vec{F_L} = i \, d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$= i \, dl \, B \, \vec{u_\theta}$$

$\vec{F_L} = i L B \vec{u_\theta}$ glisseur appliqué au CI de la barre.

$$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) = i L B \times \frac{L}{2} = i \frac{L^2 B}{2} = -\frac{1}{4} \frac{L^4 B^2}{R} \frac{d\theta}{dt}$$

$$(M) \quad J \ddot{\theta} = -mg \frac{L}{2} \sin\theta - \frac{1}{4} \frac{L^4 B^2}{R} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{L^4 B^2}{R J} \dot{\theta} + \frac{mgL}{2J} \theta = 0 \quad \theta \text{ petit.}$$

$(E) \times i + (M) \dot{\theta}$

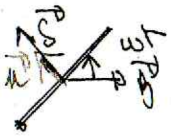
$$J \dot{\theta} \ddot{\theta} = R i^2 - mg \frac{l}{2} \dot{\theta} \sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mg z_G\right) = R i^2$$

Ex: alternateur d'une éolienne

1 – Fem induite

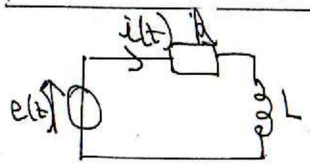
Flux de $\vec{B}$ à travers la bobine : $\Phi = N\,\vec{B}\cdot\vec{S}$



$$\Phi = -NBS\sin(\omega t)$$

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega\cos(\omega t)$$

Schéma électrique équivalent :



$$e(t) = R\,i(t) + L\frac{di}{dt}$$

Passage en notation complexe :

$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ $\quad \underline{e} = NBS\omega e^{j\omega t}$

D'où $(R + jL\omega)\,\underline{i} = \underline{e}$

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}}{R + jL\omega}$$

D'où $\boxed{I_m = |\underline{i}| = \frac{NBS\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}}$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

2 – $\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}$

Avec $\vec{M} = NS\,i(t)\,\vec{n}$

$$\vec{\Gamma}_L = -NBS\,i(t)\cos(\omega t)\,\vec{u}_z = \Gamma_L \vec{u}_z$$

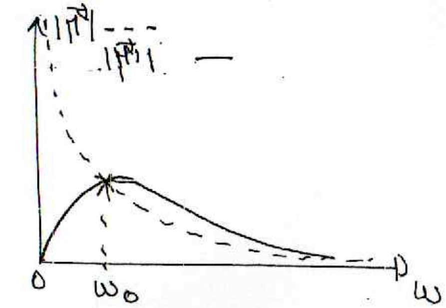
$$\cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)\right)$$

$$\vec{\Gamma}' = \langle \Gamma_L \rangle = -\frac{N^2 B^2 S^2 \omega}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos(\varphi)\,\vec{u}_z$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}' = -\frac{N^2 B^2 S^2 \omega\, R}{2\left(R^2 + L^2\omega^2\right)}\vec{u}_z}$$

3 – $P = K = |\vec{\Gamma}|\omega \Rightarrow |\vec{\Gamma}| = \frac{P}{\omega}$



$\therefore |\vec{\Gamma}'|$ extremum lorsque $\frac{R^2}{\omega} + L^2\omega = D(\omega)$ extremale

$\frac{dD}{d\omega} = -\frac{R^2}{\omega^2} + L^2 = 0 \Rightarrow \omega = \omega_{max} = \frac{R}{L}$

$\frac{d^2D}{d\omega^2} = \frac{2R^2}{\omega^3} > 0 \Rightarrow$ mini $\Rightarrow \langle|\vec{\Gamma}'|\rangle$ maxi pour $\omega = \omega_0$

$t = 0 \quad \omega = 0 \quad |\vec{\Gamma}| > |\vec{\Gamma}'| \Rightarrow$ rotation

$J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \Gamma' > 0 \quad \vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u}_z \quad \vec{\Gamma}' = \Gamma'\vec{u}_z$

Quand $\omega \nearrow$, $\Gamma \searrow$, $\Gamma' \nearrow$.

Régime permanent lorsque $\Gamma = \Gamma'$ $\quad \omega = \omega_0$ tq

$$\frac{P}{\omega_0} = \frac{N^2 B^2 S^2 R}{2(R^2 + L^2\omega_0^2)}\omega_0 \Rightarrow 2P(R^2 + L^2\omega_0^2) = N^2B^2S^2R\,\omega_0^2$$

$$\omega_0^2\left(N^2 B^2 a^2 R - \mathcal{L} P L^2\right) = \mathcal{L} P R^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{L} P R^2}{N^2 B^2 a^2 R - \mathcal{L} P L^2}}$$

Condition $\mathcal{L} P L^2 < N^2 B^2 a^2 R$.

$$P < P_C = \frac{N^2 B^2 a^2 R}{\mathcal{L} L^2}.$$

Ma reg Hatte

Rmq: si ω devient légèrement supérieure à $\omega_0 \Rightarrow \Gamma < \Gamma' \Rightarrow$ retour à la valeur $\omega = \omega_0$

si $\omega < \omega_0 \Rightarrow \Gamma > \Gamma' \Rightarrow$ retour à la valeur $\omega = \omega_0$.

Rmq: $\vec{\Gamma}_L = \Gamma_L \vec{u}_z$

Convertion électromécanique parfaite

$e(t)\, i(t) + \Gamma_L \omega = 0$

$$\frac{N^2 B^2 a^2 \omega^2}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t + \phi)\cos(\omega t) = \Gamma_L \omega$$

$\Rightarrow \Gamma_L$