ci0 - Modélisation des systèmes

Cinématique

PSI - MP : Lycée Rabelais

Pré-requis

Géométrie vectorielle

Cours de première année sur la cinématique

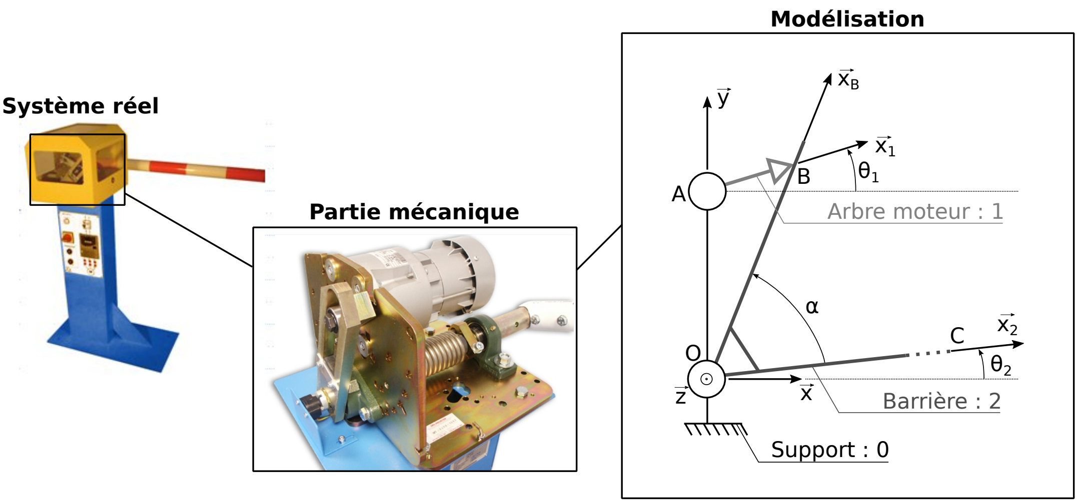
Objectifs

Savoir exploiter une fermeture géométrique

Savoir calculer une vitesse

1 Barrière de péage ★

On considère la barrière de péage présentée ci-dessous. L'arbre moteur 1 met en mouvement la barrière. Cet arbre moteur est en liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{z})$ avec le support. La barrière est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z})$ avec le support 0. Elle est également en liaison ponctuelle en B avec l'arbre moteur. Les angles θ_1 et θ_2 paramètrent les rotations des pièces 1 et 2. Ce sont donc des fonctions du temps. L'angle $\alpha = 30°$ est propre à la géométrie de la barrière.



On paramètre le mécanisme de la manière suivante :

$\theta_1 = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y_1})$; $\theta_2 = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y_2})$ et $\alpha = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_B}) = 30°$

$\overrightarrow{OA} = h\,\overrightarrow{y}$ avec $h = 110$ mm ;

$\overrightarrow{AB} = r\overrightarrow{x_1}$ avec $r = 100$ mm ;

$\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{x_B}$ où λ est une fonction du temps ;

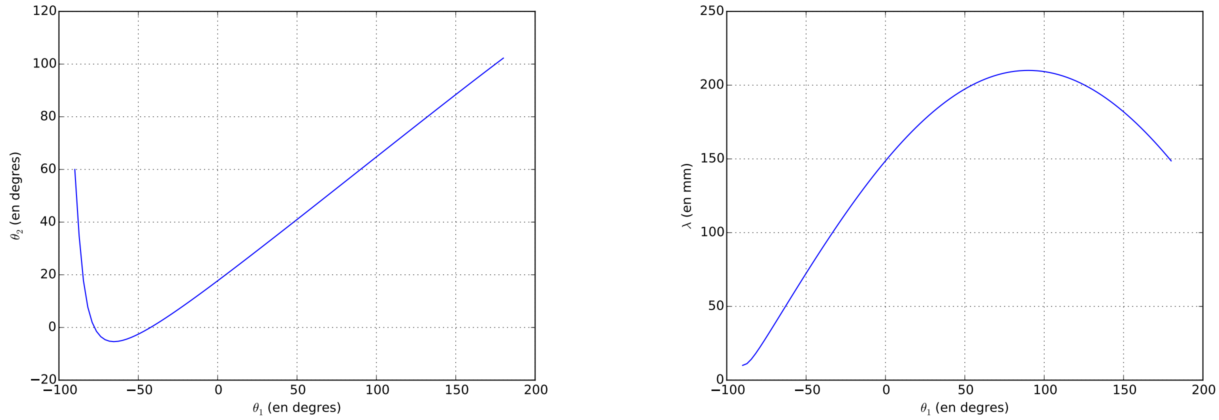
$\overrightarrow{OC} = L\overrightarrow{x_2}$ avec $L = 3000$ mm qui représente la longueur de la barrière.

On souhaite vérifier que la géométrie du mécanisme permet bien d'ouvrir et de fermer la barrière de telle sorte que $\theta_2 \in [0., 90.]$.

Question 1. Mettre en place les figures de changement de base.

Question 2. À partir d'une fermeture géométrique, déterminer une relation entre θ_2 et θ_1 puis une relation entre λ et θ_1.

Une simulation a permis d'obtenir les courbes suivantes :



Question 3. Donner un encadrement des paramètres θ_1 et λ afin que la barrière vérifie l'exigence souhaitée.

Par mesure de sécurité, on souhaite contrôler la vitesse de rotation de l'arbre moteur afin de limiter la vitesse de l'extrémité de la barrière de telle sorte que $||\overrightarrow{V}_{C\in 2/0}|| < V_{max}$.

Question 4. Calculer $\overrightarrow{V}_{C\in 2/0}$ en fonction de $\dot{\theta}_2$. Expliquer la méthodologie qu'il faudrait suivre afin de déterminer une condition sur $\dot{\theta}_1$.

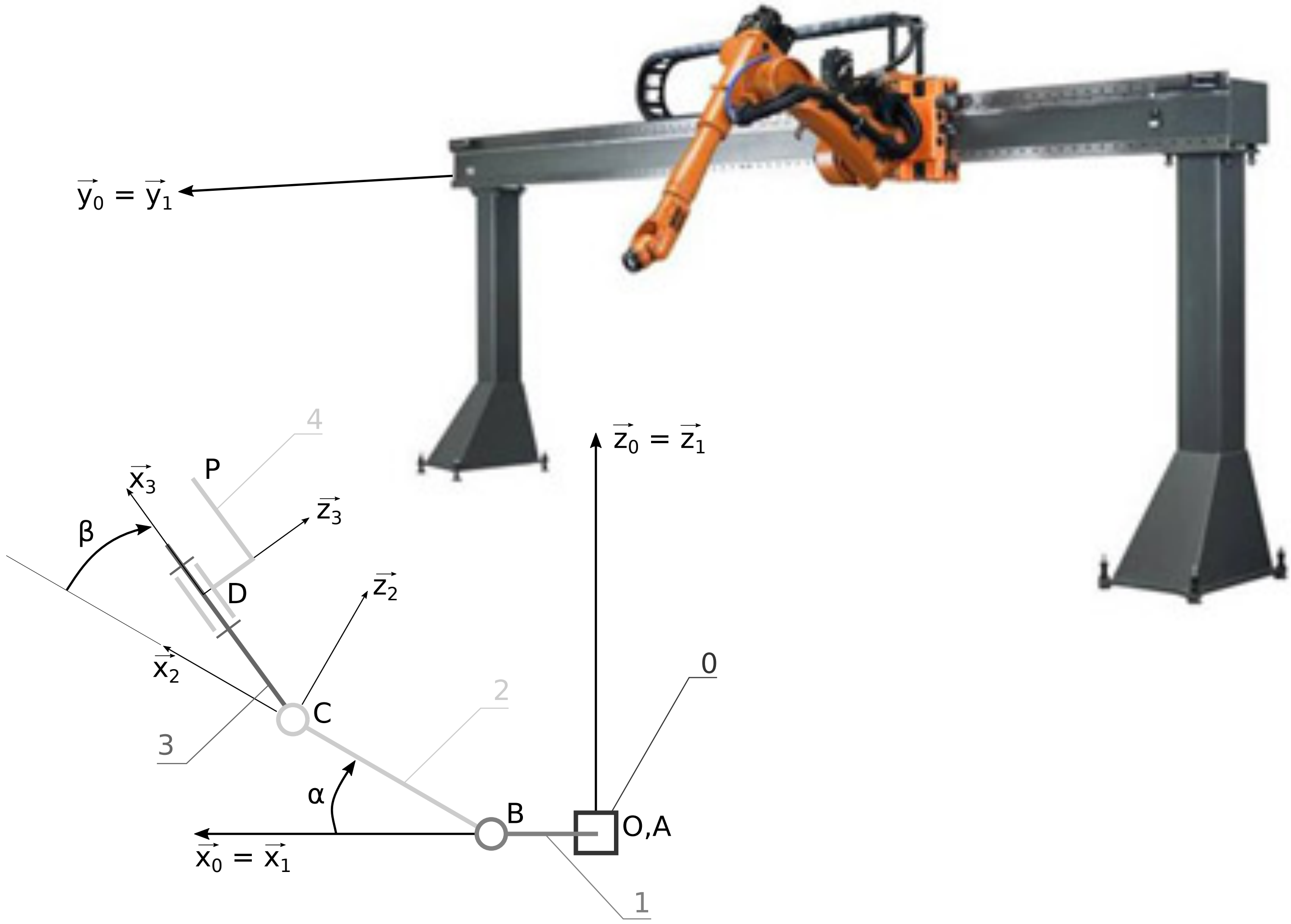
2 Robot KUKA ★

Le support de l'étude est un robot de la marque kuka (figure ci-dessous) qui a la particularité d'être monté sur un portique. Il possède donc, par rapport aux robots classiques, un mouvement de translation supplémentaire.

L'objectif est ici d'étudier la cinématique de ce robot.

Le robot est composé d'un bâti et de 4 pièces mobiles.

- Le carter (0), auquel est associé le repère $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.
- La pièce (1) à laquelle est associée le repère $R_1(A, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$. Cette pièce est en liaison glissière de direction $\overrightarrow{y_0}$ avec le carter (0). On notera $\overrightarrow{OA} = \mu \overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{x_1}$.
- La pièce (2) à laquelle est associée le repère $R_2(B, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$. Cette pièce est en liaison pivot d'axe $(B, \overrightarrow{y_1})$ avec la pièce (1). On notera $\overrightarrow{BC} = b\overrightarrow{x_2}$ et $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}) = \alpha$.
- La pièce (3) à laquelle est associée le repère $R_3(C, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$. Cette pièce est en liaison pivot d'axe $(C, \overrightarrow{y_1})$ avec la pièce (2). On notera $\overrightarrow{CD} = c\overrightarrow{x_3}$ et $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}) = (\overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{z_3}) = \beta$.
- La pièce (4) à laquelle est associée le repère $R_4(D, \overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z_4})$. Cette pièce est en liaison pivot d'axe $(D, \overrightarrow{x_3})$ avec la pièce (3). On notera $\overrightarrow{DP} = d\overrightarrow{x_3} + e\overrightarrow{z_4}$ et $(\overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{y_4}) = (\overrightarrow{z_3}, \overrightarrow{z_4}) = \gamma$.



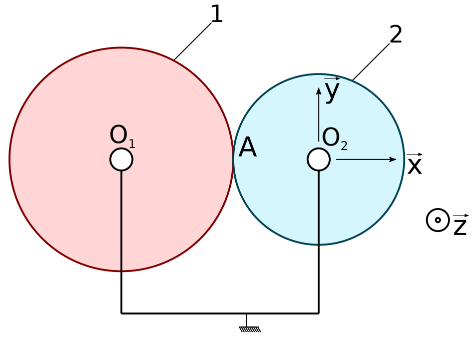
Question 1 : Mettre en place un graphe des liaisons.

Question 2 : Calculer $\overrightarrow{V}_{P\in 4/0}$.

Question BONUS : On suppose $\gamma = 0$. Donner la/les condition(s) à satisfaire (en utilisant le produit scalaire) pour que le point P décrive, dans le repère 0, une trajectoire linéïque de direction $\overrightarrow{z_1}$. En déduire une relation entre α et β.

3 Engrenages

3.1 Train simple : engrenages à axes fixes



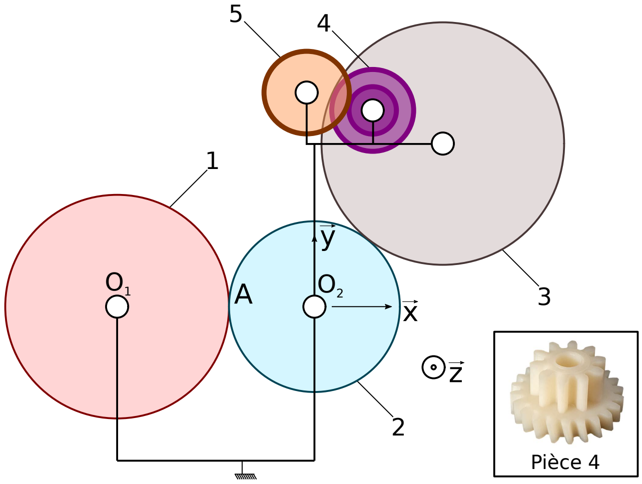
On considère le cas d'un engrenage à deux roues dentées 1 et 2 qui roulent sans glisser en A. On note R_1, le rayon de la roue dentée 1 et R_2, le rayon de la roue dentée 2. On note $\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \omega_{10}.\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \omega_{20}.\overrightarrow{z}$.

Q°1 - Ecrire la condition de roulement sans glissement.

Q°2 - En déduire la relation classique : $\dfrac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\dfrac{R_1}{R_2}$.

Pour un engrènement entre deux roues, il y a proportionnalité entre le nombre de dents et le diamètre, on montre donc que : $\dfrac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\dfrac{R_1}{R_2} = -\dfrac{D_1}{D_2} = -\dfrac{Z_1}{Z_2}$ où D_i (respectivement Z_i) représente le diamètre (respectivement le nombre de dents) de la roue i.

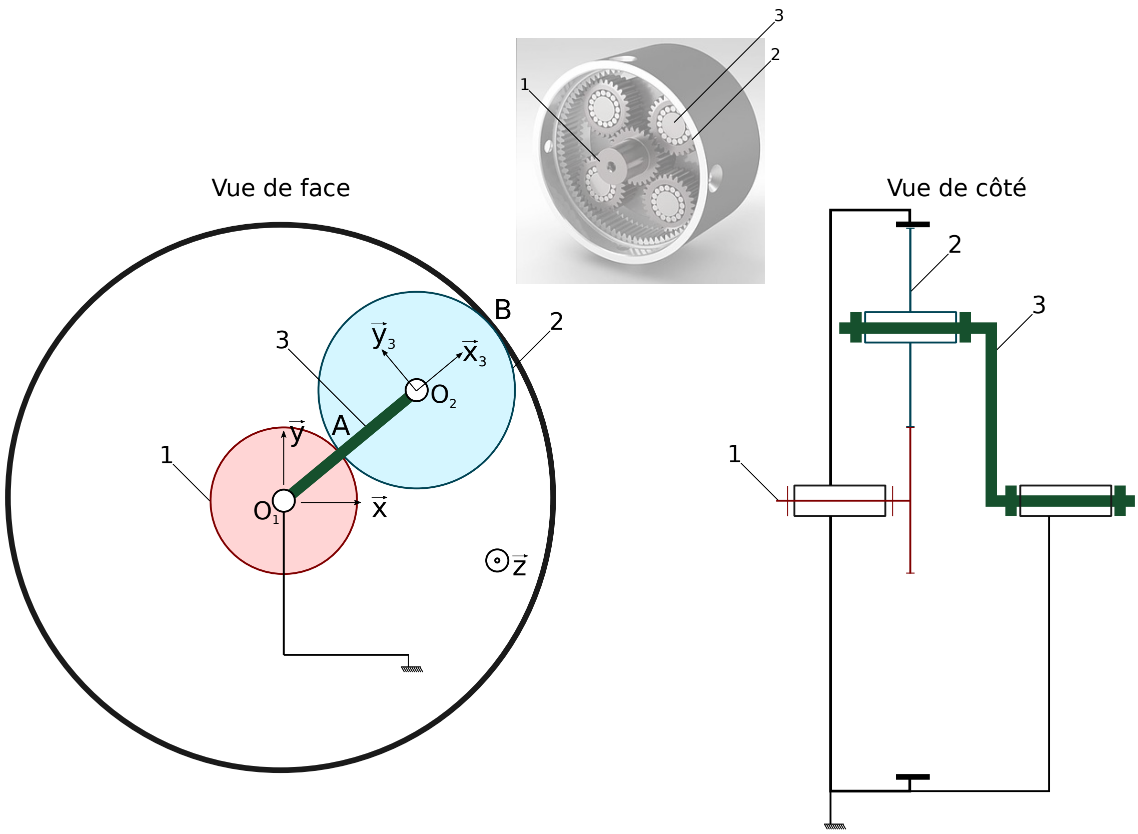
3.2 Un peu plus compliqué !



On note maintenant : R_1, le rayon de la roue 1, R_2, le rayon de la roue 2, R_3, le rayon de la roue 3, R_{43} le rayon de la partie de la roue 4 qui engrène avec la roue 3, R_{45} le rayon de la partie de la roue 4 qui engrène avec la roue 5, et R_5, le rayon de la roue 5.

Q°3 - Déterminer le rapport des vitesses de rotation $\dfrac{\omega_{50}}{\omega_{10}}$ en fonction des rayons.

3.3 Train épicycloïdal



On considère maintenant le cas d'un train epicycloïdal. On notera :

- le bâti, noté 0, de rayon R_0 ;
- le planétaire, noté 1, de rayon R_1 ;
- le(s) satellite(s), noté(s) 2, de rayon R_2 ;
- le porte satellite, noté 3, de rayon R_3 .

Le satellite roule sans glisser sur le planétaire en A et sur le bâti en B. On note $\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \omega_{10}.\overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \omega_{20}.\overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{\Omega}_{3/0} = \omega_{30}.\overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{\Omega}_{2/3} = \omega_{23}.\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{3/1} = \omega_{31}.\overrightarrow{z}$.

Q°1 - Ecrire la condition de roulement sans glissement en A puis en déduire la relation : $R_1.\omega_{13} + R_2.\omega_{23} = 0$.

Q°2 - En déduire le rapport : $\dfrac{\omega_{13}}{\omega_{23}}$.[1]

Q°3 - Montrez de même que : $\dfrac{\omega_{23}}{\omega_{30}} = -\dfrac{R_0}{R_2}$.[2]

Q°4 - En déduire le rapport de réduction du train epicycloïdal : $\dfrac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$.

Q°5 - Quel serait le rapport de réduction de n trains épicycloïdaux de rapport de réduction r assemblés "en cascade" ?

[1] On aurait pu trouver cette relation directement (sans calcul) en remarquant que le mécanisme est un train simple (axes fixes) dans le repère du porte-satellite.

[2] Même remarque.