Fonctions de plusieurs variables - Différentielle d'une fonction .

Ce texte ne prétend pas être un cours de maths sur les fonctions de plusieurs variables .
Le but de ce poly est de présenter ce que représente la différentielle d'une fonction pour un physicien et d'introduire les outils de base permettant d'utiliser les fonctions de plusieurs variables dans le cadre du programme de physique .

1- Différentielle d'une fonction d'une variable :

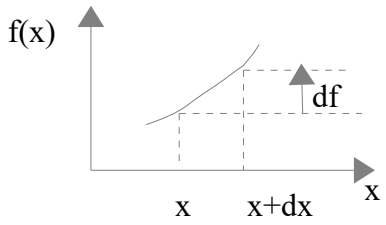
1-1 Définition :

Soit f une fonction dérivable de la variable x .

Développement de Taylor autour de x : f(x + h) = f(x) + f '(x) h + o(h)

Pour le physicien dx est un accroissement infiniment petit de la variable x autour du point M d'abscisse x et df représente l'accroissement infiniment petit correspondant de la fonction f(x) .

$$df = f'(x)dx = \frac{df}{dx}dx$$



La définition ci-dessus correspond à la partie du développement de Taylor jusqu'à l'ordre 1 :

$$df = f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx = \frac{df}{dx}dx$$

Intégration d'une différentielle : $\int_A^B df = f(B) - f(A)$

1-2 Calcul pratique des différentielles :

Fonction	Différentielle
$f(x) = A x^n$	$df = n A x^{n-1} dx$
$f(x) = e^{\alpha x}$	$df = \alpha e^{\alpha x} dx$
$f(x) = \ln(x)$	$df = \frac{dx}{x}$
$f(x) = \sin(x)$	$df = \cos(x)dx$
.	.
.	.
.	.
$f(x) = u(x) + v(x)$	$df = du + dv = u'(x)dx + v'(x)dx$
$f(x) = u(x)v(x)$	$df = u(x)dv + v(x)du$ $df = (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $v(x) \neq 0$	$df = \frac{v(x)du - u(x)dv}{v^2(x)}$ $df = (\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)})dx$

2- Fonctions de plusieurs variables :

2-1 Dérivée partielle :

Soit f (x,y,z) une fonction de 3 variables .

On appelle dérivée partielle du premier ordre par rapport à x au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la valeur de la limite , lorsqu'elle existe , du taux d'accroissement en x de la fonction f .

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}(x_{0,}y_{0,}z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0, z_0)-f(x_{0,}y_{0,}z_0)}{h}$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$ correspond au calcul de la dérivée de f par rapport à x lorsque les variables y et z sont maintenues constantes (on trouve également la notation f'_x .

De même $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}$ correspond au calcul de la dérivée de f par rapport à y lorsque les variables x et z sont maintenues constantes .

Remarque :

Le symbole de dérivation partielle par rapport à la variable x est $\frac{\partial}{\partial x}$, **numérateur et dénominateur sont indissociables .**

On peut définir des dérivées d'ordre supérieur , par exemple pour une fonction f(x,y)

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_y$ correspond au calcul de la dérivée seconde de f par rapport à x , la variable y étant maintenue constante .

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)_{x\ y}$: on dérive d'abord par rapport à y la variable x étant maintenue constante puis on dérive par rapport à x la variable y étant maintenue constante .

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)_{y\ x}$:on dérive d'abord par rapport à x la variable y étant maintenue constante puis on dérive par rapport à y la variable x étant maintenue constante .

En physique les fonctions habituelles rencontrées étant de classe C^2 , alors on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Exemple :

Soit la fonction $f(x, y, z)=(y^2+z^3)\ln(x)$.

1- Calculer $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(y,z)}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,z)} et \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x,y)}$.

2- Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} et \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

2-2 Différentielle :

Soit f(x,y,z) une fonction dérivable sur une partie de R^3 .

On appelle différentielle de la fonction f l'expression : $\boxed{df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}dy+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}dz}$

De la même manière que pour une fonction d'une variable , nous écrirons souvent en physique :

$$f(x+dx, y)-f(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx$$

Remarque 1 : en physique , on utilise généralement cette expression pour évaluer la variation infiniment petite df de la fonction f lorsque les variables x , y , z subissent une variation infiniment petite dx , dy , dz .

Remarque 2 :
Soit une fonction f de classe C^2 dont la différentielle s'écrit :
$df = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$
les fonctions P , Q et R vérifient le th de Schwarz :
$(\frac{\partial P}{\partial y})_{x,z} = (\frac{\partial Q}{\partial x})_{y,z}$, $(\frac{\partial P}{\partial z})_{x,y} = (\frac{\partial R}{\partial x})_{y,z}$, $(\frac{\partial Q}{\partial z})_{x,y} = (\frac{\partial R}{\partial y})_{x,z}$

2-3 Différentielle logarithmique :
Définition :
Soit f (x ,y ,z) une fonction supposée non nulle et dérivable au point considéré ; on appelle différentielle logarithmique de f la différentielle du logarithmique de la valeur absolue de la fonction :

$$d[\ln|f(x,y,z)|] = \frac{df}{f} = \frac{1}{f}[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz]$$

Remarque 1 :
En physique la différentielle logarithmique de la fonction f permet d'évaluer la variation relative de la fonction f lorsque x , y et z subissent des variations infiniment petites .

Remarque 2 :
La différentielle logarithmique est souvent utilisée pour simplifier les calculs d'incertitudes .

Propriétés :
Soient u (x,y,z) et v(x,y,z) fonctions différentiables non nulles des trois variables indépendantes x,y,z .

$$d[\ln|uv|] = d(\ln|u|) + d(\ln|v|) = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$
$$d[\ln|\frac{u}{v}|] = d(\ln|u|) - d(\ln|v|) = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$$
$$d[\ln|u^r|] = d(r\ln|u|) = r\,d(\ln|u|) = r\frac{du}{u}$$

Exemple :
Déterminer la différentielle logarithmique des expressions suivantes :
$PV^\gamma = cste$, $PV = cste$, $Q = \frac{P_{NH_3}{}^2 P^{\circ 2}}{P_{N_2} P_{H_2}^3}$ où P° est une constante, les autres pressions étant variables .

3- Intégration de l'expression d'une dérivée partielle :
On suppose que l'on connaît la dérivée partielle par rapport à y de la fonction f (x , y) :
$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$ et on cherche l'expression de f par intégration .
On cherche alors une primitive de Q(x,y) considérée comme une fonction de la variable y (o considère x comme une constante) , il faut faire attention car la constante d'intégration est à priori une fonction de la variable x .
$\frac{\partial f}{\partial y}$ s'intègre en $f(x,y) = \int Q(x,y)dy + K(x)$

Si on connaît les deux dérivées partielles de f(x,y) , $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ on peut déterminer f à une constante

d'intégration près .

Exemple :

→ On cherche à déterminer la fonction $P(r,z)$ telle que :

$\frac{\partial P}{\partial r}=\rho w^2 r$ et $\frac{\partial P}{\partial z}=-\rho g$ où $\rho, w et g$ sont des constantes

→ on dispose de la différentielle de l'énergie interne d'un gaz réel $dU=C_v dT+\frac{a}{V^2}dV$ où $C_v et a$ sont des constantes . Exprimer $\frac{\partial U}{\partial T} et \frac{\partial U}{\partial V}$. Déterminer la fonction U(T,V) .