TP2 : RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUA. DIFF.

L'objet de ce TP est tout d'abord de tester le schéma d'Euler, vu en cours, sur des exemples. C'est aussi l'occasion de revoir l'usage des modules NumPy et matplotlib.pyplot.

1 Exemple du pendule

Rappelons l'équation régissant le mouvement du pendule (sans frottements) : $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$; où θ désigne l'angle du fil avec la verticale, l la longueur du fil et g la constante de gravitation.

Remarquons qu'il s'agit d'un exemple d'équation différentielle non linéaire.

Les programmes sont à compléter dans le fichier `TP-EulerPendule_A_compléter.py`.

1.1 Première méthode

On note $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}(t)$.

1. En notant θ_k et ω_k les approximations de $\theta(t_k)$ et $\omega(t_k)$, écrire le schéma d'Euler correspondant.
2. Compléter la fonction `Euler_pendule(l,T,theta_0,omega_0,n)` qui retourne l'approximation par la méthode d'Euler de $\theta(t)$ et $\omega(t)$ entre $t = 0$ et $t = T$ avec la valeur de θ en $t = 0$ égale à `theta_0` et une vitesse initiale nulle. On prendra $g = 10ms^{-2}$.
On stockera les valeurs successives de θ_k et ω_k dans deux listes `list_theta` et `list_omega`.

Représenter la solution (tester par exemple avec $l = 1$, $T = 5$, $\theta_0 = 0,5$ et $n = 50$, puis $n = 500$, $n = 5000$).

Correspond-elle au comportement attendu ?

1.2 Deuxième méthode : avec Numpy

On voit que l'on peut en s'arrangeant continuer à utiliser les listes Python, mais pour ce genre de problème d'analyse numérique, on préfère souvent utiliser les tableaux qui sont fournis par le module NumPy.

1. On pose $Y(t) = (\theta(t), \omega(t))$. Écrire la fonction F telle que $Y'(t) = F(Y(t), t)$.
Définir également cette fonction en python. On pourra prendre g et l comme variables globales. La fonction doit renvoyer un tableau numpy.
2. Écrire une fonction `Euler_pendule2(T,theta_0,omega_0,n)` résolvant l'équation différentielle en utilisant la méthode d'Euler. Plus précisément, on appliquera la méthode d'Euler directement à Y . On utilisera la fonction F précédemment définie ; la fonction renverra un tableau numpy de taille $(2, n + 1)$.
3. Représenter le portrait de phase, c'est à dire $\theta(t)$ en abscisse et $\frac{d\theta}{dt}(t)$ en ordonnée.
Quelle est l'allure de cette courbe ?

2 Modèle proies-prédateurs

L'américain Lotka et l'italien Volterra, spécialistes de la dynamique des populations ont proposé dans les années vingt un modèle simple pour décrire les relations entre proies et prédateurs. Les proies, par exemple des lapins, sont censées avoir une source illimitée de nourriture végétale et les prédateurs, par exemples des lynx, ne se nourrissent que des proies (par exemple les lapins). Considérons deux populations animales de proies (effectif $x(t)$) et de prédateurs (effectifs $y(t)$). Lorsque les deux populations sont présentes sur le même territoire, on propose pour décrire leur évolution conjointe le modèle suivant (a, b, c, d réels positifs, t en années) :

$$\begin{cases} x'(t) = a.x(t) - b.x(t).y(t) \\ y'(t) = -c.y(t) + d.x(t).y(t) \end{cases} \quad ; \quad x(t_0) = x_0 \quad ; \quad y(t_0) = y_0 .$$

1. Commenter l'évolution de la population de proies en l'absence de prédateurs.
2. Commenter le terme de régulation de la population des proies en présence de prédateurs.
3. Commenter l'évolution de la population des prédateurs en l'absence de proies.
4. Ecrire avec soin le système différentiel d'ordre 1 vérifié par la fonction vectorielle $z(t) = (x(t), y(t))$ que vous préciserez sous la forme $z'(t) = F(z(t))$, F à définir.
5. On souhaite appliquer la méthode d'Euler sur l'intervalle $[0; T]$ avec taux de discrétisation (ou nombre d'intervalles entre les points d'échantillonnage) N .
Écrire les suites $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ et $(y_i)_{0 \leq i \leq N}$ définies dans ce cadre par ce schéma d'Euler.
6. Implémenter la fonction `F(z)` (l'entrée sera une liste de deux éléments, la sortie également, `a, b, c, d` sont supposées être des variables globales).
7. Implémenter la fonction `EulerVectorielle(F, z0, T, N)` (arguments : `F` : fonction vectorielle de l'équation différentielle ; `z0` : vecteur initial ; `T` : temps maximal d'étude et `N` : taux de discrétisation) qui retourne la liste `Z` des vecteurs $z(t)$.
Remarque : on pourra, ou non, utiliser le format `array` de `numpy` ; mais on restera cohérent dans les notations.
8. On prend les valeurs suivantes : $a = 0,6$, $b = 0,8$, $c = 0,6$, $d = 0,3$, $x_0 = 5$ et $y_0 = 1$. L'étude se fera sur $T = 50$ ans avec un taux de discrétisation $N = 5000$. Écrire un script dans lequel vous importerez les modules nécessaires, initialiserez les paramètres, appellerez la fonction `EulerVectorielle` et tracerez l'évolution de x et y en fonction du temps.
Tracer ensuite le diagramme de phase en (x, y) .
Commenter les graphiques obtenus.

3 Complément : un exemple d'équations aux dérivées partielles

On considère un problème de diffusion de chaleur dans une barre homogène de section S , de longueur $l = 1m$, de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , de masse volumique μ . En l'absence de perte de chaleur latérale, la diffusion de chaleur se fait uniquement dans l'axe de la barre ($0x$). Si on note $T(x, t)$ la température au point d'abscisse x de la barre à un instant t , cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} .$$

La barre est initialement à une température $T1 = 300K$; au temps $t = 0$, on applique à son extrémité une température $T2 = 400K$, tout en maintenant son extrémité $x = 0$ à $T1 = 300K$. Pour l'application numérique, on posera $\alpha = \frac{\lambda}{\mu c}$ et on prendra $\alpha = 10^{-5}m^2s^{-1}$.

On va discrétiser l'équation à la fois en temps et en espace. Pour cela, on choisit un pas dx égal à $0.01m$ et un pas dt égal à $1s$. On fixe également la durée de la simulation à $60s$.

On stockera les valeurs approchées de $T(x, t)$ dans un tableau T de sorte que $T[k, 1]$ soit la valeur approchée de $T(k \times dx, l \times dt)$.

1. Commencer le programme en déclarant les constantes utiles.
2. Faire un schéma du tableau T et l'initialiser, y compris les conditions à $t = 0$.
3. On va maintenant établir le schéma d'intégration numérique de cette EDP en s'inspirant du schéma d'Euler.
 - (a) Connaissant au temps $t_{l-1} = (l - 1) \times dt$ les valeurs approchées en chaque $x_k = k \times dx$ $T[k, l-1]$, par quelle valeur peut-on approcher $\frac{\partial T}{\partial x}(x_{k+1}, t_{l-1})$ et fonction de $T[k+1, l-1]$ et $T[k, l-1]$? Par quelle valeur peut-on approcher $\frac{\partial T}{\partial x}(x_k, t_{l-1})$ et fonction de $T[k, l-1]$ et $T[k-1, l-1]$?
 - (b) Par quelle valeur peut-on alors approcher $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_k, t_{l-1})$?
 - (c) En utilisant l'EDP, quelle valeur approchée de $\frac{\partial T}{\partial t}(x_k, t_{l-1})$ cela nous donne-t-il ?
 - (d) Comment calculer, en s'inspirant du schéma d'Euler, $T[k, 1]$ à partir de ce qui précède ? (Bien observer pour quelles valeurs de k cela est valable.)
4. Implémenter le schéma dégagé à la question précédente.
5. Une fois que cela fonctionne, augmenter la durée de la simulation à une heure et tracer le profil de température en fonction de x toutes les 10 minutes.
6. Quelle doit être la situation à l'équilibre ?