SPE MP

DIFFUSION (CONDUCTION) THERMIQUE

I- Différents modes de transfert thermique : conduction , convection et rayonnement

1- Conduction thermique :

Transfert thermique dans la matière sans mouvement macroscopique .

Exemple : si on chauffe une barre à une de ses extrémités , la température s'élève de proche en proche , l'élévation de température se traduit à l'autre extrémité de la barre .

L'origine du mécanisme de conduction thermique se situe au niveau microscopique : le chauffage va provoquer localement une augmentation de l'agitation thermique qui se transfert de proche en proche par un mécanisme qui fait intervenir les électrons libres (les métaux qui sont de bons conducteurs électriques sont aussi de bons conducteurs thermiques) .

Les transferts thermiques par conduction sont majoritaires dans les solides ; dans les fluides les transferts diffusifs sont moins importants et souvent masqués par des transferts thermiques convectifs .

2- La convection :

A l'inverse de la conduction (transfert diffusif sans transport de matière) , la convection correspond à des transferts supportés par des mouvements macroscopiques de matière .

Ce type de transfert est prépondérant dans les fluides : les différences de température dans le fluide engendre des mouvements convectifs , les parties chaudes plus légères s'élèvent et sont remplacées par les plus froides .

- Convection naturelle : elle se produit spontanément dans un fluide présentant un gradient de température .
- Convection forcée : elle est utilisée pour réchauffer ou refroidir des fluides (échangeurs thermiques) . Le principe consiste à établir un contact thermique entre deux fluides à températures différentes et mis en mouvement forcé ; le contact thermique est assuré par une plaque assurant un transfert thermique de type conductif .

3- Rayonnement thermique (ou transferts radiatifs) :

Le rayonnement est un transfert à distance sans contact entre la source et le récepteur , sans échauffement du milieu intermédiaire : ex : un objet exposé au soleil s'échauffe .

Les corps chauffés émettent un rayonnement électromagnétique qui peut se propager dans le vide , ce transfert ne nécessitent , contrairement à la conduction et à la convection , aucun milieu matériel.

L'agitation thermique provoque au sein du corps une accélération des particules libres qui se traduit par l'émission d'un rayonnement électromagnétique (cf dipôle oscillant) .

Le spectre émis est continu et d'autant plus décalé vers les fréquences élevées que la température est élevée .

Ce transfert est à notre échelle instantané , les ondes électromagnétiques rayonnées transportent de l'énergie qu'elles cèdent à la matière . Ces ondes peuvent aussi également être décrites comme un flux de photons (particules de masse nulle se déplaçant à la vitesse c , ces photons possèdent une énergie qu'ils cèdent à la matière lorsqu'ils sont absorbés .

Ondes électromagnétiques : $\lambda = \frac{c}{\nu}$

visible : $400\ nm < \lambda < 800\ nm$
ultraviolet $2nm < \lambda < 400\ nm$
infrarouge $0{,}8\ \mu m < \lambda < 300\ \mu m$

Les photons associés à une onde électromagnétique de fréquence ν ont une énergie $E = h\nu$

$h = 6{,}63 .10^{-34} J.s$ constante de Planck et une quantité de mouvement $p = \frac{h\nu}{c}$

Rayons γ	Rayons X	UV	visible	IR	Radar	télévision
20 pm	10 nm	0,4 µm	0,8 µm	300 µm	mm	cm m

Les corps chauffés émettent un rayonnement électromagnétique qui peut se propager dans le vide , ce transfert ne nécessitent , contrairement à la conduction et à la convection , aucun milieu matériel.
L'agitation thermique provoque au sein du corps une accélération des particules libres qui se traduit par l'émission d'un rayonnement électromagnétique (cf dipôle oscillant) .
Le spectre émis est continu et d'autant plus décalé vers les fréquences élevées que la température est élevée .

II- Flux thermique – Vecteur densité de courant thermique :

1- Généralités :

Dans les différents bilans d'énergie que nous effectuerons, le système considéré sera dans la plupart des cas, un élément de volume dV d'un solide ou d'un liquide incompressible, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, qui échange, avec le milieu extérieur, uniquement de l'énergie thermique (le travail reçu est nul) . Soit $\delta U = \delta U(t)$ l'énergie interne de ce système à l'instant t .
Dans ce cas, entre t et t+dt, la variation de l'énergie interne du volume dV vérifie : .

$$\boxed{d(\delta U) = \delta U(t+dt) - \delta Ub(t) = d(\delta H) = \delta^2 Q_{reçue} = \delta P_{threçue}\, dt}$$

Si la température du système varie de dT entre t et t+dt , si on note δm la masse du système élémentaire considéré, alors la variation d'énergie interne s'écrit :

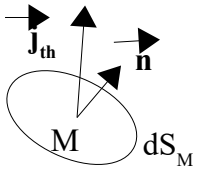
$$\boxed{d(\delta U) = c\,\delta m\, dT = c\,\delta m\,(T(t+dt) - T(t)) = \rho\, c\, dV\, dT}$$

Rem :
→ La notation $\delta^2 Q$ indique que l'on considère des grandeurs deux fois élémentaires : volume dV élémentaire et durée dt élémentaire .
→ Pour une puissance thermique reçue donnée, plus la capacité thermique du système sera grande plus les variations de température seront faibles et plus le temps caractéristique d'évolution de la température sera grand .
Dans le cas limite où la capacité thermique tend vers l'infini, la température du système peut être considérée comme constante (cas par exemple d'un thermostat) .

2- Vecteur densité de courant thermique- Flux thermique :

Le transfert thermique par conduction est transporté par un courant d'énergie à l'intérieur la matière appelé courant thermique .
Le courant thermique est décrit par un champ vectoriel $\boxed{\vec{j}_{th}(M,t)}$ noté souvent également $\vec{j}_Q(M,t)$, appelé **vecteur densité de courant thermique (ou densité de flux thermique) .**

On se place en un point M , à l'intérieur du matériau considéré, et on considère une surface élémentaire dS_M autour du point M . On choisit un vecteur unitaire $\vec{n}$ orthogonal à cette surface, le vecteur surface élémentaire est alors défini par $d\vec{S}_M = dS_M\,\vec{n}$.



On définit le vecteur densité de courant thermique de la manière suivante : **la quantité d'énergie qui traverse dS_M dans le sens du vecteur $\vec{n}$ entre t et t+dt est égale à :**

$$\delta^2 Q = \vec{j}_{th}(M,t).d\vec{S}_M\,dt = \vec{j}_{th}(M,t).\vec{n}\,dS_M\,dt$$.

Le vecteur $\vec{j}_{th}$ donne la direction dans laquelle l'énergie se déplace ; sa norme indique l'importance du courant d'énergie .

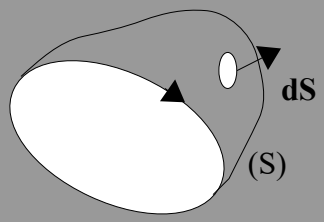
On appelle flux thermique traversant la surface dS_M dans le sens de $\vec{n}$, la puissance thermique traversant dS_M dans le sens de $\vec{n}$ (c'est un débit d'énergie thermique).

$$\delta\Phi = \delta P_{th} = \vec{j}_{th}(M,t).d\vec{S}_M = \vec{j}_{th}(M,t).\vec{n}\,dS_M$$

La norme du vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}(M,t)$ correspond donc à la puissance par unité de surface au point M .

$[\delta\Phi] = W$ d'où $[j_{th}] = W.m^{-2}$

Le flux thermique (ou puissance thermique) $\Phi(t)$ traversant une surface S est égal au flux du vecteur densité de courant thermique à travers la surface S :



$$\Phi(t) = \iint_{(S)} \vec{j}_{th}(M,t).d\vec{S} = \frac{\delta Q}{dt}$$ avec δQ l'énergie thermique traversant la surface S pendant dt

3- Loi de Fourier (1768-1830) :

Le vecteur densité de courant thermique est lié au gradient du champ de température T(M , t) dans le matériau par la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th}(M,t) = -\lambda\,\vec{grad}\,T(M,t)$$

où λ est une grandeur positive appelée conductivité thermique du matériau .

$$[\lambda] = W.m^{-1}.K^{-1}$$

Le signe – dans la loi de Fourier traduit le fait que le transfert thermique a lieu deszones les plus chaudes vers les zones les plus froides .
Phénomène irréversible .

Remarques :

→ la loi de Fourier est une loi phénoménologique (ne se démontre pas) qui permet de décrire efficacement les phénomènes de diffusion observés . Elle n'est pas vérifiée si le gradient de température est trop important ou s'il varie trop rapidement au cours du temps .

→ La conduction thermique fait intervenir des mécanismes proches de la conduction électrique : les métaux bons conducteurs électriques sont aussi de bons conducteurs thermiques ; il y a des analogies entre les loi physiques décrivant les deux phénomènes .

→ La conductivité thermique d'un matériau dépend de la nature de ce matériau mais aussi de la température . Sauf indication contraire, la conductivité sera supposée indépendante de T .

Ordres de grandeurs à 25°C :

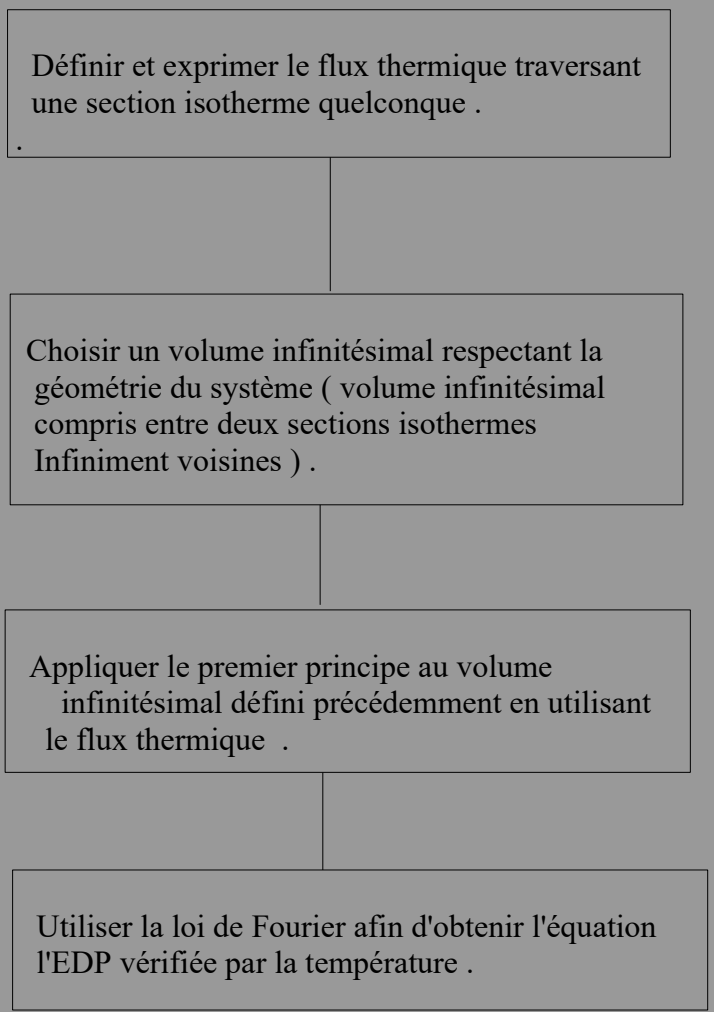
Matériau	Conductivité thermique en $W.m^{-1}.K^{-1}$
Cuivre	401
aluminium	237
acier	16
béton	0,92
Glace 0°C	2,4
verre	0,6 à 2
Bois	0,15 à 0,45
Laine de verre	0,04
Polystyrène expansé	$3,9.10^{-3}$
Eau	0,61
air	0,03

III- Equation de la diffusion thermique :

On considère un matériau homogène de masse volumique ρ , de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique c .

Le but est d'établir l'équation aux dérivées partielles (EDP) vérifiée par le champ de température T(M,t) dans le matériau (démonstrations en géométries plane, cylindrique, sphérique unidimensionnelle sont à connaître) .

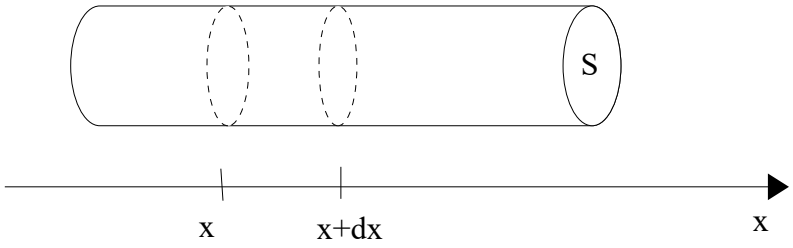
Pour cela on appliquera la procédure suivante :



1- Géométrie plane unidimensionnelle:(ex cours 1)

On considère un matériau de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, de conductivité thermique λ et de section S uniforme dont les parois latérales sont calorifugées et dont les extrémités sont maintenues à des températures différentes .

On considère que la température en un point est uniquement fonction de x et de t .



a- Conduction pure :

Appliquer la procédure décrite ci-dessus afin d'établir l'équation aux dérivées partielles vérifiées par la température T(x , t) appelée équation de diffusion thermique ou équation de la chaleur .

On obtient l'équation : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{-\partial j_{th}}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

On peut introduire la diffusivité thermique du milieu définies par $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$, l'équation de diffusion devient : $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

$[\frac{\partial T}{\partial t}] = K.s^{-1}$ et $[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}] = K.m^{-2}$ D_{th} s'exprime donc en $m^2 s^{-1}$

Ordres de grandeur :

Pour le cuivre : $D_{th} = 117.10^{-6} m^2.s^{-1}$.

Pour l'eau : $D_{th} = 0{,}14.10^{-6} m^2.s^{-1}$

pour la laine de verre : $D_{th} = 1{,}42.10^{-6} m^2.s^{-1}$

b- Présence d'un terme de source (ou de production) :

Des réactions nucléaires, un courant électrique … peuvent créer de la puissance thermique à l'intérieur du matériau .

On appelle $p_v(x,t)$ la puissance thermique volumique créée à l'intérieur du matériau par un processus autre que la diffusion . $p_v(x,t)$ s'exprime en $J.m^{-3}$

Appliquer la procédure décrite ci-dessus afin d'établir l'équation aux dérivées partielles vérifiées par la température T(x , t) .

On obtient l'équation : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_v(x,t)$

Remarque :

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \Delta T$ (opérateur laplacien) , l'équation précédente s'écrit $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p_v(x,t)$

2- Géométrie cylindrique unidimensionnelle (ex cours 2) :

On considère un cylindre de rayon R constitué d'un matériau de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, de conductivité thermique λ .
On considère que la température en un point M est uniquement fonction de r et de t où r est la distance du point M à l'axe du cylindre .

Ce cylindre peut éventuellement contenir des sources qui créent une puissance thermique volumique $p_v(r,t)$.

Montrer, en appliquant le protocole précédent que la température $T(r,t)$ vérifie :

→ en l'absence de source : $\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})$

→ en présence de terme de source $\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+p_v(r\,t)$

Remarque :

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})=\Delta T$ d'où $T(r,t)$ vérifie $\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\Delta T+p_v(r\,t)$

Il ne faut pas chercher à «développer » le terme $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})$

3- Géométrie sphérique unidimensionnelle :(ex cours 3)

On considère une sphère de rayon R constitué d'un matériau de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, de conductivité thermique λ .
On considère que la température en un point M est uniquement fonction de r et de t où r est la distance du point M au centre de la sphère .

Ce cylindre peut éventuellement contenir des sources qui créent une puissance thermique volumique $p_v(r,t)$.

Montrer, en appliquant le protocole précédent que la température $T(r,t)$ vérifie :

→ en l'absence de source : $\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\lambda}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T}{\partial r})$

→ en présence de terme de source $\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\lambda}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T}{\partial r})+p_v(r\,t)$

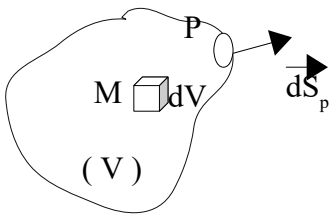
Remarque :

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T}{\partial r})=\Delta T$ d'où $T(r,t)$ vérifie $\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\Delta T+p_v(r\,t)$

Il ne faut pas chercher à «développer » le terme $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T}{\partial r})$

4- Généralisation :(démonstration non exigible)

On fait un bilan d'énergie entre t et t+dt sur un volume (V) de matériau, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, de conductivité thermique λ délimité par une surface fermée (S) .
On appelle $p_v(M,t)$ la puissance volumique créée en M, à t, par des processus autre que la diffusion .



$$dU = \delta Q_{reçue} = \delta Q_{cond} + \delta Q_{sources}$$

$$dU = \iiint_{(V)} \rho\, c\, dV\, dT = \iiint_{(V)} \rho\, c\, dV \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$\delta Q_{cond} = -\oiint_{(S)} \vec{j}_{th}(M,t).d\vec{S}_P\, dt \quad \text{et} \quad \delta Q_{sources} = \iiint_{(V)} p_v(M,t)\, dV\, dt$$

D'où :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_{(V)} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad = \quad -\oiint_{(S)} \vec{j}_{th}.d\vec{S}_P \quad + \quad \iiint_{(v)} p_v(M,t)\, dV$$

terme de stockage — terme de transfert — terme de production

D'après de théorème de Green Ostogradsky $\oiint_{(S)} \vec{j}_{th}(M,t).d\vec{S}_P\, dt = \iiint_{(V)} div\ \vec{j}_{th}\, dV$

D'où $$\iiint_{(V)} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad = \quad -\iiint_{(V)} div\ \vec{j}_{th}\, dV \quad + \quad \iiint_{(v)} p_v(M,t)\, dV$$

La relation précédente étant vraie quelque soit le volume (V) , on en déduit que :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad = \quad -div\ \vec{j}_{th} \quad + \quad p_v(M,t)$$

Or d'après la loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda\, \vec{grad}(T)$ et div($\vec{grad}(T)$) = ΔT , on obtient la formulation générale de l'équation de diffusion :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p_v(M,t)$$

5- Caractéristiques générales de l'équation de la chaleur :

→ L'équation de la chaleur est une équation linéaire .
→ Les phénomènes de diffusion sont irréversibles .
→ Unicité de la solution vérifiant les conditions initiale et aux bords du domaine d'étude .
→ Lien entre temps caractéristique de diffusion τ et longueur L caractéristique du problème :

ordre de grandeur du temps de diffusion τ sur une longueur caractéristique L :

$$L^2 \approx D_{th}\, \tau$$

Pour une longueur caractéristique L = 1 m :
Pour le cuivre : $D_{th} = 117.10^{-6}\, m^2.s^{-1}$, $\tau \approx 8547\, s$ *soit* 2h22mn
Pour la laine de verre : $D_{th} = 1{,}42.10^{-6}\, m^2.s^{-1}$, $\tau \approx 704225\, s$ soit environ 8 jours .
Les phénoùmènes de trnsport par diffusion sont lents .

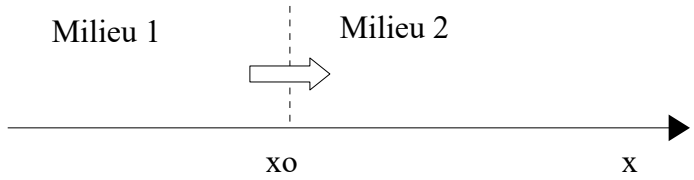
IV Conditions aux limites :

L'équation de la diffusion thermique est une équation d'ordre 2 par rapport aux variables d'espace . Pour être résolue, elle requiert donc deux conditions aux limites sur les frontières du système étudié .

1- Conditions portant sur la température :

On impose la distribution de température en certains points de la surface extérieure du système .
Exemple : une barre dont les températures aux extrémités sont imposées (contact parfait avec deux thermostats par ex) .

2- Continuité du flux thermique :

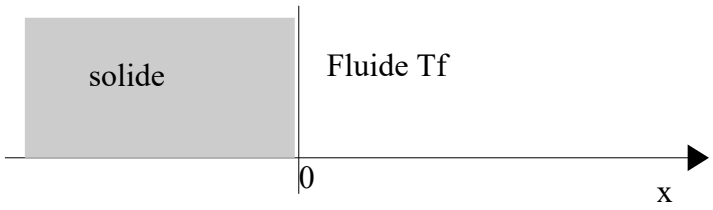


On considère deux milieux 1 et 2 entre lesquels s'observe un transfert thermique. Il ne peut pas y avoir d'accumulation d'énergie thermique sur l'interface . Toute la puissance thermique quittant, en x_0 , le milieu 1 se retrouve dans le milieu 2 .
On a donc égalité des flux thermiques dans les milieux 1 et 2 en x_0 , $\Phi (x_0^-) = \Phi (x_0^+)$, on peut simplifier par la surface S de l'interface on en déduit donc que $j_{th}(x_0^-) = j_{th}(x_0^+)$.

Il y a conservation du flux thermique à travers une interface .

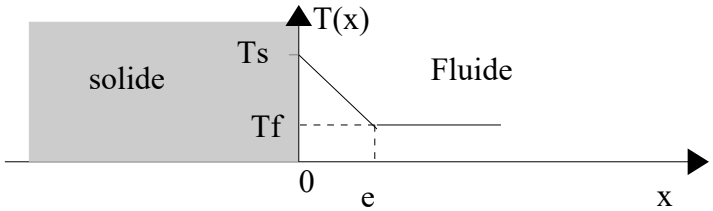
3- Contact entre deux milieux :

Contact solide-fluide : loi de Newton



On considère un fluide de température Tf en contact avec un solide . Le fluide est animé de mouvements de convection et des échanges thermiques ont lieu au niveau de l'interface . Ces échanges entraînent une discontinuité de température entre la surface du solide et le fluide en contact .

Modélisation:au voisinage de l'interface, il existe une couche limite de l'ordre d'une fraction de mm dans laquelle le fluide peut-être considéré comme immobile, dans cette couche le transfert thermique peut-être considéré comme exclusivement conductif . Il existe un gradient de température dans cette couche limite dans laquelle on considère que le profil de température affine .
On appelle Ts la température de surface du solide, λ_s la conductivité thermique du solide, λ_f celle du fluide et e l'épaisseur de la couche limite .

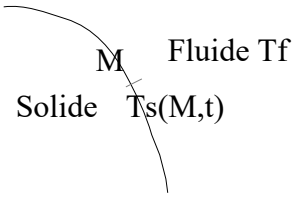


Dans le cas d'un transfert uniquement conductif dans la couche limite le flux thermique se conserve, de plus il y a continuité du flux thermique à l'interface solide-fluide d'où

$$-\lambda_s\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = -\lambda_f\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{couche\,limite} = -\lambda_f\frac{T_f - T_s}{e}$$

Le flux surfacique ϕ_{cc} sortant du solide au niveau de l'interface est donc proportionnel à la différence de température entre la surface du fluide et la température du fluide au delà de la couche limite .

La couche limite étant très faible, on modélise l'interface entre un point de la surface d'un solide et un fluide par une marche de température, les échanges thermiques au niveau de l'interface solide fluide étant modélisés par la loi de Newton .



Le flux par unité de surface sortant du solide au point M de l'interface solide fluide est donné par la loi de Newton $\boxed{\phi_{cc} = h\left(T_s(M,t) - T_f\right)}$

h est appelé coefficient de transfert thermique de surface ou coefficient de transfert conducto-convectif .

[h] = $W.m^{-2}.K^{-1}$

ordre de grandeur : contact air-solide h de 5 à 30 $W.m^{-2}.K^{-1}$ si la convection est naturelle, h peut-être multiplié par un facteur 10 en cas de convection forcée .

Contact parfait :

Lorsque h tend vers l'infini, le transfert thermique restant fini cela implique la continuité de la température à l'interface solide fluide, on parle alors de contact parfait .

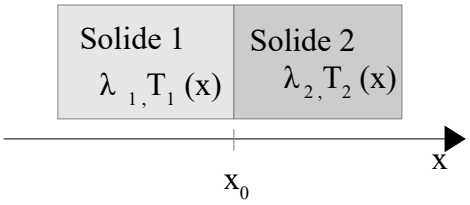
De manière générale, un contact parfait à l'interface entre deux milieux décrit la situation dans laquelle la température est continue à l'interface .

Rayonnement thermique :

Il peut également au niveau d'une interface solide fluide des transfert de type radiatif, le flux radiatif surfacique total sortant du fluide au niveau de l'interface s'écrit (dans le cadre de l'hypothèse du corps noir), $\phi_{rad} = \sigma\left(T_f^4 - T_s^4\right)$

4- Exemples :

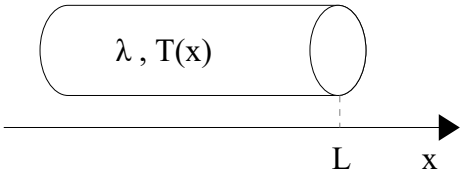
→ Contact parfait entre deux solides :



Il y a continuité du flux thermique à l'interface d'où $-\lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{(x=x_0)} = -\lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{(x=x_0)}$

De plus si le contact est parfait : $T_1(x_0,t) = T_2(x_0,t)$

→ Flux thermique à l'extrémité d'une tige :



Si l'extrémité est thermiquement isolée : $\phi(x=L,t)=-\lambda(\frac{\partial T}{\partial x})_{(x=L)}=0$

Si l'extrémité de la barre est en contact avec un fluide de température Tf , en notant h le coefficient de transfert thermique de surface : $\phi(x=L)=-\lambda(\frac{\partial T}{\partial x})_{(x=L)}=h(T(L,t)-Tf)$

V Régime stationnaire :

1- Définition – propriétés :

Dans le cas du régime stationnaire les différentes grandeurs sont indépendantes du temps :
$T(M,t)=T(M)$ $\vec{j}_{th}(M,t)=\vec{j}_{th}(M)$

→ Bilan de puissance et équation de diffusion dans le cas général :
Les différentes grandeurs étant indépendantes du temps, l'énergie interne d'un volume fixe de matériau n'évolue pas au cours du temps d'où $\frac{dU}{dt}=0$ ce qui entraîne que la somme des puissances entrant algébriquement dans le volume et créées dans le volume est nulle . Ce qui peut également se traduire par le fait que la somme des puissances entrantes et créées dans le volume est égale à la somme des puissances sortantes .

En régime permanent, $\sum(P_{ent\,alg}+P_{créées\,alg})=0$ ou encore $\sum(P_{ent}+P_{créées})=\sum P_{sortantes}$

L'équation de diffusion s'écrit : $\lambda\Delta T(M)+p_v(M)=0$ avec $p_v(M)$ puissance volumique produite en M .
Dans le cas où il y a un terme de source, le flux thermique n'est pas conservatif .

→ Cas de la diffusion pure : conservation du flux thermique :

Ex cours 5:montrer, pour les géométries plane, cylindrique et sphérique unidimensionnelle, qu'en régime stationnaire et en l'absence de sources, le flux thermique a même valeur à travers toute section isotherme du matériau .

Généralisation : en régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t}=0$ et en l'absence de terme de source $p_v=0$, pour tout point M, $T(M)$ vérifie l'équation $\Delta T(M)=0$ (équation de Laplace de la diffusion thermique)

Or ΔT = div ($\vec{grad}(T(M))$) = 0 et $\vec{j}_{th}=-\lambda\vec{grad}(T)$ d'où div ($\vec{j}_{th}$) = 0 .

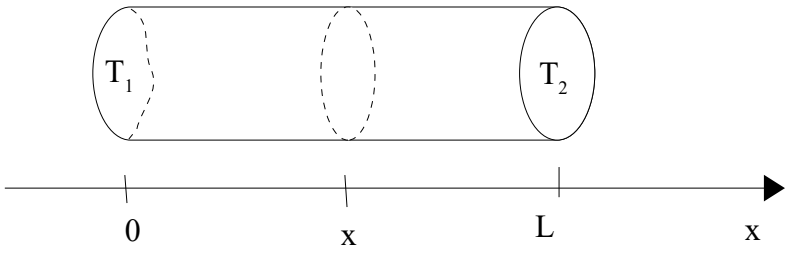
En régime stationnaire, le vecteur densité de courant thermique est à flux conservatif (div ($\vec{j}_{th}$) = 0) , ce qui entraîne la conservation du flux thermique qui a même valeur à travers toute section isotherme du matériau considéré . On peut alors parler de flux traversant le matériau .

2- Notion de résistance thermique :

a- Température dans une tige :

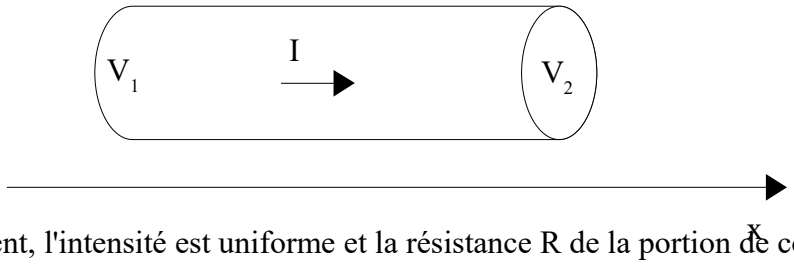
On considère une tige, de section S, de longueur L et de conductivité thermique λ .
On se place en régime stationnaire et en régime de conduction pure .
On suppose le problème plan unidimensionnel .
T (M) = T (x) et $\vec{j}_{th}(M)=j_{th}(x)\vec{u}_x=-\lambda\frac{dT}{dx}\vec{u}_x$.

Les extrémités de la tige sont maintenues aux températures $T_1 et T_2$.



b- Analogie avec l'électrocinétique : résistance thermique :

→ Si on considère un tronçon de conducteur électrique, de section S, parcouru, en régime permanent par un courant axial d'intensité I et soumis à une différence de potentiel $V_1 - V_2$



En régime permanent, l'intensité est uniforme et la résistance R de la portion de conducteur est définie $R = \frac{V_1 - V_2}{I}$; c'est une constante positive .

→ Si on reprend le problème du a- , on voit que le rapport $\frac{T_1 - T_2}{\Phi}$ est une constante positive .

Il y a une analogie entre les deux problèmes : le flux thermique Φ étant l'analogue de l'intensité électrique I et la température T l'analogue du potentiel V .

Nous allons donc, par analogie, définir **la résistance thermique de la portion de matériau** par :

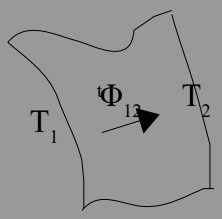
$\boxed{R_{th}=\frac{T_1-T_2}{\Phi_{1\to 2}}}$ avec $\Phi_{1\to 2}$ le flux thermique traversant le matériau de l'isotherme T_1 vers l'isotherme T_2 .

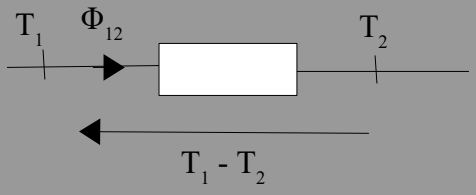
Dans le cas de notre problème plan , $\boxed{R_{th}=\frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}}$ $\boxed{[R_{th}]=K.W^{-1}}$

c- Généralisation :

→ Résistance thermique :

Soit un matériau siège, en régime stationnaire, de transferts thermiques uniquement diffusifs, délimité par deux sections isothermes de températures $T_1 et T_2$.
Soit $\Phi_{1\to 2}$ le flux thermique traversant le matériau de l'isotherme T_1 vers l'isotherme T_2 .





La résistance thermique du matériau est définie par : $\boxed{R_{th}=\frac{T_1-T_2}{\Phi_{1\to 2}}>0}$ et $\boxed{[R_{th}]=K.W^{-1}}$

On peut définir également la conductance thermique : $G_{th}=\frac{1}{R_{th}}=\frac{\Phi_{1\to 2}}{T_1-T_2}$ avec $[G_{th}]=W.K^{-1}$

Remarque :

→ Pour une différence de température donnée, plus la résistance thermique du matériau sera grande, plus la puissance thermique le traversant sera faible .

→ Une paroi diathermane a une résistance thermique nulle ce qui implique l'égalité des températures de part et d'autre de celle-ci . $R_{th}=0\ d'où\ T_1=T_2$ **.**

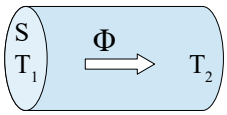
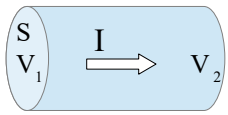
→ Une paroi adiabatique a une résistance thermique infinie et donc la puissance thermique la traversant est nulle $R_{th}\to\infty$ **et** $\Phi_{1\to 2}=0$ **.**

→ Analogie conduction électrique – conduction thermique en régime stationnaire:

L'intensité traversant la section S d'un conducteur est définie à partir d'une grandeur locale, le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ qui est tel que $I=\int\int_S \vec{j}(M)\,d\vec{S}_M$.

$\vec{j}(M)$ est lié au potentiel électrostatique V(M) par la loi d'Ohm locale $\vec{j}(M)=-\gamma\ \vec{grad}(V(M))$ où γ est la conductivité électrique du matériau .

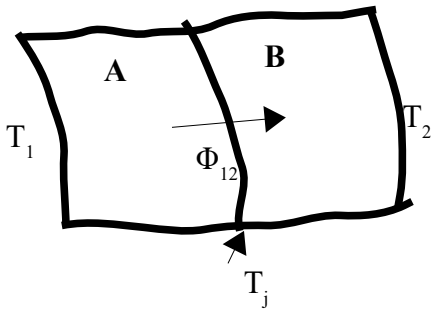
On peut établir une analogie entre la conduction électrique la conduction thermique .

Loi de Fourier	Loi d'Ohm
$\vec{jth} = -\lambda \, \vec{grad}\,(T)$ Vecteur densité de courant thermique W.m^{-2}	$\vec{j} = -\gamma \, \vec{grad}\,(V)$ vecteur densité de courant A.m^{-2}
λ = conductivité thermique W.K^{-1} .m^{-1}	γ= conductivité électrique S.m^{-1}
Φ flux thermique = puissance thermique $\Phi = \int\int_S \vec{jth} \,.\, \vec{dS}$ en W	I intensité électrique $I = \int\int_S \vec{j} \,.\, \vec{dS}$ en A
Température T	Potentiel V
Résistance thermique R_{th} en K.W^{-1} Conductance thermique $G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$ en W.K^{-1}	Résistance électrique R en Ω Conductance électrique $G = \frac{1}{R}$ en S ou Ω^{-1}
Résistance thermique d'un barreau  $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}$	Résistance électrique d'un barreau  $R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$
Capacité thermique $C\frac{dT}{dt} = \Phi$	Capacité d'un condensateur $C\frac{dV}{dt} = I$

d- Loi d'association des résistances thermiques :

On considère deux conducteurs thermiques A et B . L'ensemble est délimité par deux isothermes $T_1 et T_2$.

→ Association en série :

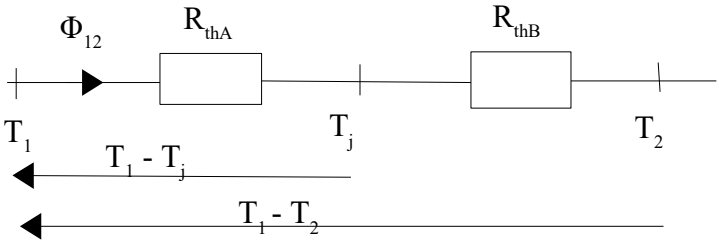


Le flux thermique est uniforme dans chaque matériau (régime stationnaire, diffusion pure) . De plus le flux thermique étant continu à l'interface des deux matériaux, **les deux matériaux sont traversés par le même flux thermique .**

On appelle T_j la température de la surface de contact entre les deux matériaux .

Deux résistances thermiques R_{thA} et R_{thB} associées en série (traversées par le même flux thermique) sont équivalentes à une résistance thermique de valeur $R_{theq}=R_{thA}+R_{thB}$.

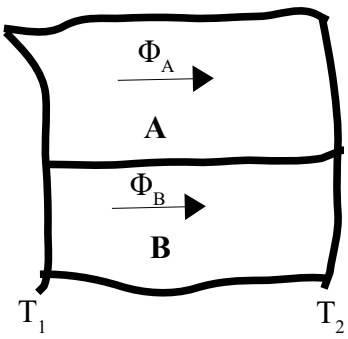
On peut donner un schéma électrique équivalent au système étudié :



Ex:la résistance thermique d'un mur en béton recouvert d'une couche d'isolant est la somme des résistances thermiques du mur en béton et de la couche d'isolant .

Pour calculer la température de jonction T_j, on peut appliquer l'analogue du diviseur de tension en électrocinétique .

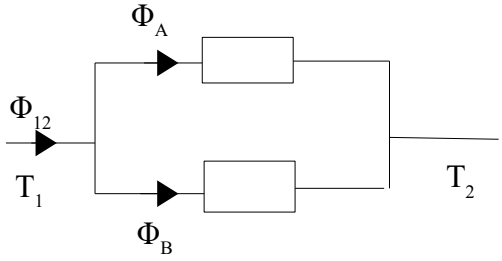
→ Résistances en parallèle :



Le flux thermique total traversant l'ensemble des matériaux est égal à la somme des flux thermiques traversant chaque matériau .

Deux résistances thermiques R_{thA} et R_{thB} associées en parallèles (soumises à la même différence de températures) sont équivalentes à une résistance thermique de valeur R_{theq} telle que $\frac{1}{R_{theq}}=\frac{1}{R_{thA}}+\frac{1}{R_{thB}}$ (ou conductance équivalente $G_{theq}=G_{thA}+G_{thB}$)

Le système peut être modélisé par le schéma électrique suivant :



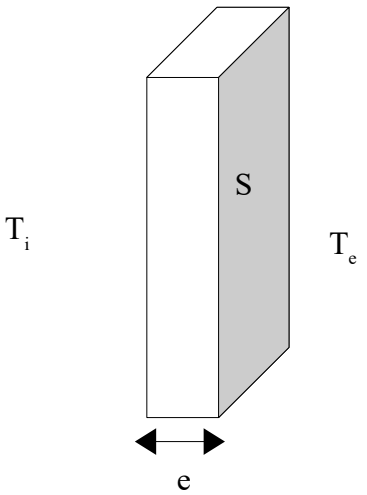
Ex:Une fenêtre et le mur qui l'entoure sont deux conducteurs thermiques associés en parallèle .

3- Prise en compte des transferts thermiques de surface , résistance thermique d'une interface solide-fluide :

Exemple :

Un considère une paroi constituée d'un matériau d'épaisseur e, de surface S et de conductivité thermique λ séparant l'intérieur d'un pièce à la température T_i du milieu extérieur à la température T_e .

On appelle h_i le coefficient de transfert conducto-convection (ou coefficient de transfert de surface ou coefficient de Newton) entre l'air intérieur et la face intérieure de la paroi et h_e le coefficient de transfert conducto-convection (ou coefficient de transfert de surface ou coefficient de Newton) entre l'air extérieur et la face extérieure de la paroi .



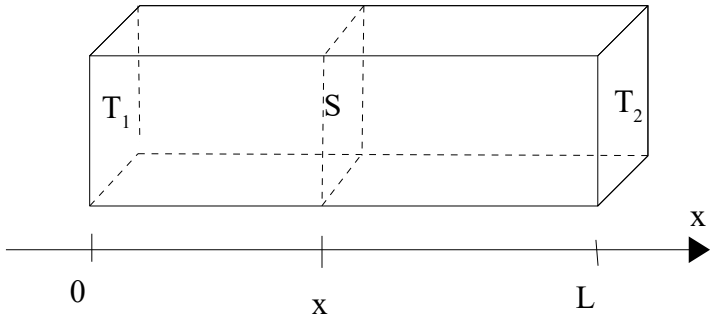
Généralisation :

Une interface solide-fluide de surface S a pour résistance thermique $R_{cc}=\frac{1}{h\,S}$ **où h est le coefficient conducto-convectif entre la surface du solide et le fluide (loi de Newton) .**

4- Exercices cours suite :

On se place en régime stationnaire .

a- Résistance thermique en géométrie plane unidimensionnelle :ex cours 4



On considère un matériau de conductivité thermique λ . On suppose $L \ll \sqrt{S}$, de ce fait on peut alors que la température ne dépend que de x .

Exprimer, à partir de la loi de Fourier, le flux thermique traversant une section du matériau .

En intégrant la relation précédente, établir l'expression de la résistance de la portion de matériau ci-dessus .

D'où l'expression de la résistance thermique d'un matériau , de géométrie plane, de longueur L , de section S et de conductivité thermique λ **:** $R_{th}=\frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}$ **.**

b- Géométrie cylindrique : résistance thermique d'un matériau situé entre deux cylindres coaxiaux : ex cours 5

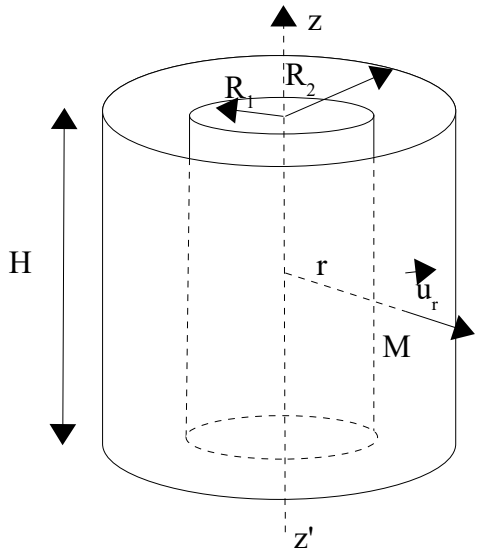
Soit un matériau homogène, de conductivité thermique λ , compris entre deux cylindres de rayons $R_1 et R_2$ et de hauteur H telle que $H \gg R_1 et R_2$. On se place en régime stationnaire et on considère des transferts uniquement diffusifs .

Le problème peut être considéré comme invariant par rotation autour de (z'z) et par translation le long de (z'z), on peut alors considérer que la température en un point M est uniquement fonction de r, T(M) = T(r) .

Le vecteur densité de courant thermique en M s'écrit : $\vec{j}_{th}(M) = j_{th}(r)\vec{u}_r = -\lambda \frac{dT}{dr}\vec{u}_r$

Les lignes de courant sont radiales . Les isothermes sont des cylindres .

Il y a conservation du flux thermique, le flux thermique traversant, dans le sens 1 vers 2 , l'isotherme de rayon r est indépendant de r , on le note $\Phi_{1\to 2}$:



Exprimer, à partir de la loi de Fourier, le flux thermique traversant une section du matériau .

En intégrant la relation précédente, établir l'expression de la résistance de la portion de matériau ci-dessus .

Remarque :

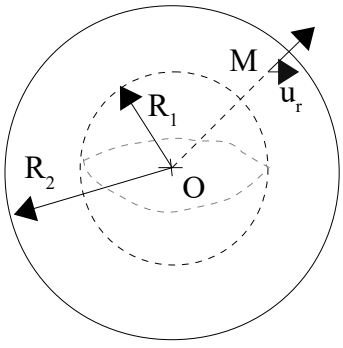
On peut également résoudre l'équation de la diffusion $\Delta T = 0$, déterminer T(r) en utilisant les conditions aux limites $T(r=R_1)=T_1 et T(r=R_2)=T_2$ puis déterminer $\Phi_{1\to 2}$ en fonction de $T_1 - T_2$.

c- Géométrie sphérique : résistance thermique d'un matériau situé entre deux sphères concentriques :ex cours 6 .

Soit un matériau homogène, de conductivité thermique λ , compris entre deux sphères de rayons $R_1 et R_2$. On se place en régime stationnaire et on considère des transferts uniquement diffusifs .

Le problème peut être considéré comme invariant par rotation autour de O, on peut alors considérer que la température en un point M est uniquement fonction de r, T(M) = T(r)

Le vecteur densité de courant thermique en M s'écrit : $\vec{j}_{th}(M) = j_{th}(r)\vec{u}_r = -\lambda \frac{dT}{dr}\vec{u}_r$



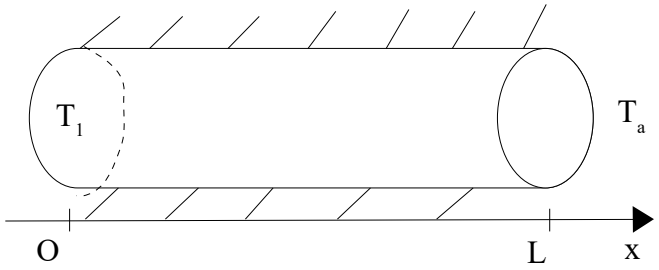
Exprimer, à partir de la loi de Fourier, le flux thermique traversant une section du matériau .

En intégrant la relation précédente, établir l'expression de la résistance de la portion de matériau ci-dessus .

Remarque :
On peut également résoudre l'équation de la diffusion $\Delta T = 0$, déterminer T(r) en utilisant les conditions aux limites $T(r=R_1)=T_1 \, et \, T(r=R_2)=T_2$ puis déterminer $\Phi_{1\to 2}$ en fonction de $T_1 - T_2$.

d- Température dans une barre avec transfert de surface à l'extrémité :ex cours 7

On considère une tige de section S, de longueur L, de conductivité thermique λ dont la surface latérale est calorifugée .

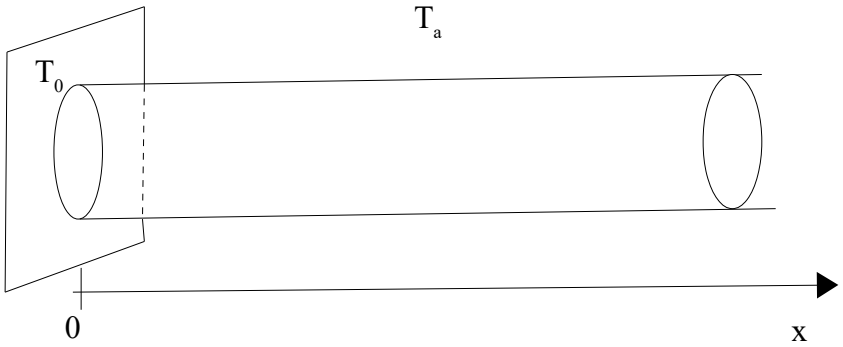


On maintient la section située en x= 0 à la température T_1 .
L'extrémité de la tige (x = L) est en contact avec de l'air à la température T_a . Les échanges entre la tige en x = L et l'air sont régis par la loi de Newton .
On appelle h le coefficient de Newton .
On travaille en régime stationnaire et on suppose qu'il n'y a pas de terme de production dans la tige . En un point M, la température ne dépend que de x .

1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la fonction T (x) .
2- Ecrire les deux conditions aux limites qui permettront de déterminer l'expression de T(x) en fonction des données .
3- Déterminer l'expression de T(x) .

e- Ailette de refroidissement : ex cours 8 .

On cherche à déterminer le profil de température T(x) , en régime stationnaire, dans une tige dont l'extrémité située en x= 0 est maintenue à la température T_0 .
On appelle λ la conductivité thermique du matériau constituant cette ailette, L la longueur et R le rayon de celle-ci .
Cette ailette est en contact, par sa paroi latérale, avec de l'air à la température T_a .
Le transfert thermique avec l'air est de type conducto-convectif et caractérisé par un coefficient de transfert de surface h .



1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la fonction T (x) .
2- Déterminer l'expression de T(x) dans le cas où la longueur L est très grande devant une longueur caractéristique que vous préciserez .
3- Déterminer la puissance thermique évacuée par l'ensemble de l'ailette .

Application numérique :
Comparons les valeurs des puissances thermiques sortant d'une surface πR^2 de la paroi avec ousans ailette .
Pour les applications numériques , on prend :
$T_0 = 82$ °C , $T_a = 22$°C , h = 100 W.m^{-2}.K^{-1} , $\lambda = 400$ W.m^{-1} .K^{-1} et R = 2 mm .
→ Sans ailette : $\Phi_{san} = h \pi R^2 (T_0 - T_a)$ $\Phi_{san} = 0{,}075\, W$
→ Avec ailette $\Phi_{avec} = \pi R^{3/2} \sqrt{2 \lambda h} (T_0 - T_a)$ $\Phi_{avec} = 4{,}8\, W$
La présence de l'ailette permet d'augmenter fortement la puissance sortant de la paroi .
Les ailettes sont utilisées pour améliorer le refroidissement de matériaux ou de composants électroniques . Par exemple , dans un ordinateur, un bloc composé de plusieurs ailettes de refroidissement est accolé au microprocesseur afin de le refroidir . Ces ailettes doivent être constituées d'un matériau bon conducteur (λ grand) et la présence d'un ventilateur permet d'augmenter le coefficient de transfert de surface h entre les ailettes et l'air extérieur .

VI ARQS thermique :

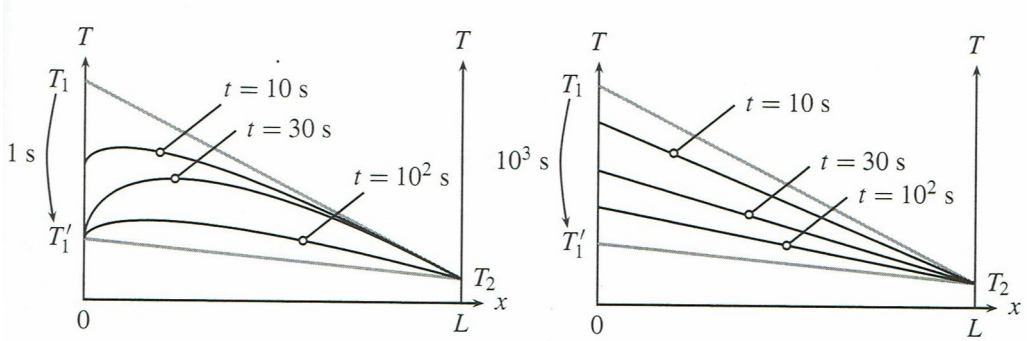
1- Définition et limite de validité :

On étudie la répartition de température en régime stationnaire dans un cylindre de section S, de longueur L dont les extrémités sont maintenues aux températures $T_1 et T_2$ et dont la surface latérale est calorifugée .

Le profil de température est $T(x,0) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L}$

Aux instants ultérieurs, on abaisse la température T_1 à T'_1 en une durée Δt . Le profil de température s'adapte et parvient , au bout d'un certain temps, à un état final décrit par
$T(x,\infty) = T'_1 + (T_2 - T'_1)\frac{x}{L}$.

Ci-dessous les courbes montrant l'évolution du profil de température dans la barre dans deux cas : à gauche le passage de T_1 à T'_1 se fait très rapidement alors qu'à droite le passage se fait lentement .



– Évolution temporelle du profil de température (en noir, à la date *t*) entre les états initial et final (en gris) : à gauche hors ARQS ; à droite dans l'ARQS.

Le temps caractéristique τ que met le cylindre pour s'adapter à la nouvelle condition en x = 0 à pour ordre de grandeur $\tau \approx \frac{L^2}{D_{th}}$.
Si la variation de température en entrée de la tige est trop rapide c'est à dire $\Delta t \ll \tau$ le profil de température dans la tige n'évolue plus de façon affine dans la barre lorsque la température à l'extrémité varie .
Dans le deuxième cas, la variation de température se fait suffisamment lentement $\Delta t \gg \tau$ pour que le profil reste à tout instant affine dans la tige dans ce cas $T(x,t) = T_1(t) + (T_2 - T_1(t))\frac{x}{L}$ dans ce cas on se trouve dans la cadre de l'ARQS thermique .

L'ARQS thermique est vérifiée lorsque le temps caractéristique τ d'évolution de la température , dans un système de longueur caractéristique L et de diffusivité thermique D_{th}, est très inférieur au temps caractéristique Δt de variation des sources d'énergie ou des conditions aux limites

$$\tau = \frac{L^2}{D_{th}} \ll \Delta t \quad .$$

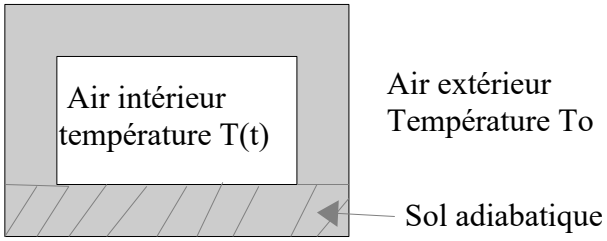
Dans ce cas la notion de résistance thermique vue en régime stationnaire reste valable .

2- Circuits RC thermiques dans l'ARQS :

Lorsqu'on étudie la régulation de la température intérieure des bâtiments, l'isolation thermique est fondamentale .

Deux paramètres apparaissent dans l'étude thermique des bâtiments :

→ La capacité thermique C du bâtiment, c'est à dire principalement de l'air qu'il contient , qui intervient dans l'augmentation de température ressentie par les occupants lorsqu'une certaine quantité d'énergie pénètre dans le bâtiment .

→ la résistance thermique R_{th} des murs, qui peut diminuer la quantité d'énergie qui pénètre dans la bâtiment .

On peut modéliser le système de la manière suivante :