

Exercices diffusion thermique

Exercice 1: résistance thermique d'un mur .

Les conductivités thermiques de certains matériaux sont précisées :

Matériau	Conductivité thermique (W.m-1.K-1)
Verre	$\lambda_v = 1,2$
Béton	$\lambda_b = 0,9$
Air	$\lambda_a = 0,025$
Laine de verre (isolant)	$\lambda_i = 0,04$

Pour le coefficient de transmission thermique de surface h , on prendre $h = 10 \text{ W.m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ sur le côté intérieur et extérieur .

1- Calculer la résistance thermique R_v correspondant au transfert thermique à travers une simple vitre d'épaisseur $e_v = 2,4 \text{ mm}$ et de surface $S_v = 1 \text{ m}^2$ depuis l'air intérieur à température supposée uniforme T_i jusqu'à l'air extérieur à la température T_e .

2- On considère maintenant une double vitrage constitué par deux vitres d'épaisseur e_v séparées par une couche d'air d'épaisseur $e_a = 5 \text{ mm}$. Pour l'air emprisonné entre les vitres , on néglige les phénomènes de convection pour ne considérer qu'un transfert purement conductif .

a- Calculer la résistance thermique R_{dv} correspondant au transfert thermique à travers le double vitrage de même surface S_v . Comparer les flux thermiques sortant d'un simple et d'un double vitrage .

b- Le mur extérieur d'un studio comporte également une surface $S_b = 12,5 \text{ m}^2$ de béton doublé d'une couche d'isolant . L'épaisseur du béton est $e_b = 9 \text{ cm}$ et celle de l'isolant $e_i = 4 \text{ cm}$. Calculer la résistance thermique R_m pour le transfert thermique à travers ce mur .

c- En déduire la résistance thermique R_e de la paroi extérieure constituée par le mur (béton et isolant) de surface $S_b = 12,5 \text{ m}^2$ et un double vitrage de surface $S_{dv} = 3,5 \text{ m}^2$.

Exercice 2 :vitre d'automobile

Une vitre d'une automobile est assimilée à une lame semi-transparente d'épaisseur e et de conductivité thermique λ .

L'absorption d'une certaine plage de fréquences du rayonnement solaire se traduit par la création d'une puissance thermique de densité volumique P_v de la forme $P_v = \frac{I_0}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}}$ δ est une grandeur caractéristique du matériau et x désigne la profondeur .

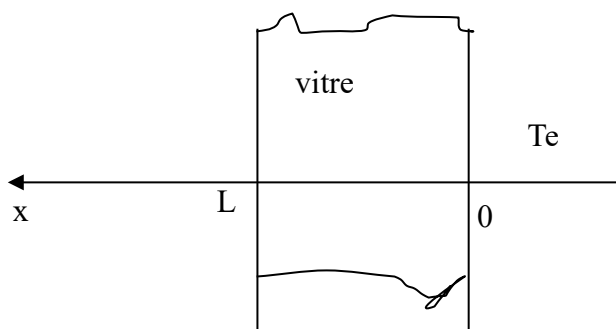
Les transferts thermiques entre la face extérieure ($x = 0$) et le milieu ambiant sont associés à un coefficient h_e .

On néglige , en $x = L$, les échanges thermiques entre la vitre et l'intérieur du véhicule .

On note $\vec{j}_q = j_q(x) \vec{e}_x$ le vecteur densité volumique de courant d'énergie thermique .

1-Déterminer $j_q(x)$ en tout point de la vitre .

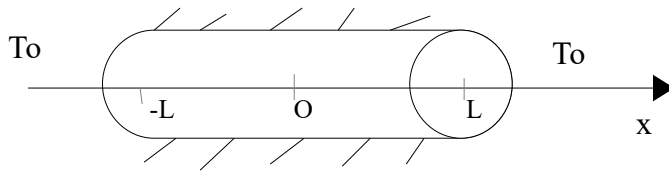
2- En déduire la répartition de température .



Exercice 3: fusible

Un fusible est modélisé comme un cylindre de section S et de longueur $2L$, de conductivité thermique λ et électrique γ . Le cylindre, calorifugé latéralement est au contact avec l'air ambiant de température T_0 à ses deux extrémités.

Le fusible est parcouru par un courant électrique et le régime est supposé stationnaire ; on suppose de plus que la température ne dépend que de la variable x .



1- Déterminer la répartition de température dans le fusible sachant que l'intensité I crée une puissance volumique

$$p = \frac{I^2}{\gamma S^2}.$$

2- Quelle section doit-on choisir si on désire que le fusible « saute » pour une intensité de 16 A ?

Données :

$L = 1 \text{ cm}$, $\lambda = 60 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, $\gamma = 1,0.10^6 \text{ S.m}^{-1}$ $T_0 = 290 \text{ K}$

température de fusion du métal constituant le fusible : $T_f = 400 \text{ K}$

Exercice 4: barreau d'Uranium

Un barreau d'Uranium a la forme d'un cylindre de rayon $a = 1 \text{ cm}$, de hauteur $H \gg a$. Des réactions nucléaires y produisent une puissance thermique volumique uniforme et constante p_v .

La conductivité thermique de l'Uranium dans le domaine de température considéré est $\lambda = 38 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, sa capacité thermique massique est c et sa masse volumique μ .

On considère que la température dans le barreau ne dépend spatialement que de la distance r à l'axe du cylindre.

1- a- Rappeler la loi de Fourier. Donner les unités des différentes grandeurs.

b- Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiées par la température $T(r, t)$ l'intérieur du barreau.

2- On se place en régime stationnaire.

a- Que devient l'équation vérifiée par la température $T(r)$ dans la barreau.

b- Déterminer la répartition de température dans le barreau lorsque sa surface latérale est maintenue à la température $T_0 = 400^\circ \text{C}$.

c- Déterminer la puissance volumique maximale que les réactions nucléaires doivent créer si on veut que la température du barreau ne dépasse pas la valeur $T_1 = 600^\circ \text{C}$.

Données :

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} U(r, \theta, z, t) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

Exercice 5 : Igloo

Trois explorateurs sont enfermés dans un igloo, de forme hémisphérique, de rayon intérieure $R = 1,5 \text{ m}$ et d'épaisseur $e = 10 \text{ cm}$. L'igloo est constitué de glace de conductivité thermique $\lambda = 2,0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. A l'extérieur, l'air est à la température constante $T_e = -5^\circ \text{C}$. A l'intérieur et à l'extérieur de l'igloo ont lieu des transferts conducto-convectifs, entre la glace et l'air, de constante $h = 5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Chaque explorateur dégage la puissance $p = 100 \text{ W}$. On supposera la situation stationnaire.

1- Définir et calculer sans approximation la résistance thermique R_{th} correspondant au transfert thermique diffusif dans la glace.

On considère $e \ll R$ donner une expression approchée de R_{th} . Commenter.

2- Déterminer la résistance thermique correspondant à l'ensemble des transferts thermiques depuis l'intérieur vers l'extérieur.

3- Déterminer la température T_i à l'intérieur de l'igloo. L'igloo fond-il ?

Exercice 6: entropie créée dans un barreau

Soit un barreau cylindrique, calorifugé latéralement, de section droite de rayon r , de longueur L , de conductivité thermique λ .

Son extrémité $x=0$ est plongée dans un four qui la maintient à la température T_f . Son extrémité $x=L$ est en contact avec l'atmosphère de température T_0 . On se place en régime stationnaire, on note $T(x)$ le champ de température

dans la barre .

Exprimer la conductance thermique du barreau . A partir d'un bilan d'entropie sur la barre, entre t et $t+dt$, déterminer l'entropie créée , par unité de temps , dans le barreau .

Exercice 7 :

Un mammifère peut-être très sommairement schématisé par une sphère de muscles de centre O , de rayon R dont le métabolisme dégage une puissance thermique uniforme P par unité de volume .

L'animal est plongé dans l'air de conductivité thermique K (pour $r > R$) ; la température du milieu ambiant loin de l'animal est T_0 . On s'intéresse à la température du milieu ambiant (pour $r > R$) en régime permanent .

1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$, pour $r > R$. En déduire l'expression de $T(r)$ en fonction de r , R , T_0 , K et P .

2- En déduire la température cutanée de l'animal . Commenter .

Exercice 8 : mesure d'une conductivité thermique

Une extrémité d'un barreau cylindrique d'aluminium de conductivité thermique λ de section S est placée dans un four .

L'autre extrémité est placée dans une enceinte adiabatique, et refroidie par un courant d'eau de débit massique constant D_m

Entre les deux, le barreau est entouré d'un isolant thermique .

L'eau rentre à la température θ_{20} et en sort à la température θ_{21} . Entre deux points distants de l , appartenant à la partie isolée, on mesure les températures θ_{10} et θ_{11} .

Le but de l'expérience est de déterminer, une fois le régime permanent établi, la conductivité thermique de l'aluminium .

On considère que dans le barreau la température ne dépend spatialement que de x coordonnées selon la verticale descendante .

1- Déterminer l'expression , en fonction des paramètres du problème, de l'ordre de grandeur de la durée d'établissement du régime permanent sur la longueur l du barreau entourée de l'isolant .

2- Déterminer, en régime permanent, la puissance thermique reçue par l'eau de refroidissement .

3- En déduire l'expression de la conductivité thermique du barreau en fonction des connées . Faire l'application numérique .

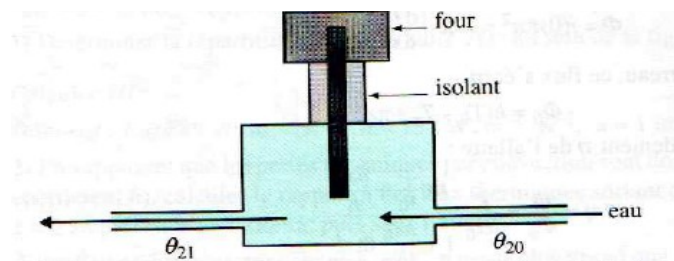
4- Combien de temps faut-il attendre pour commencer les mesures ?

Données :

$$\theta_{10} = 225^\circ C, \theta_{11} = 25^\circ C, \theta_{20} = 15,0^\circ C, \theta_{21} = 18,8^\circ C, D_m = 2,4 \text{ g.s}^{-1}, l = 50 \text{ cm}, S = 5 \text{ cm}^2$$

Capacités thermiques massiques : $c = 0,90 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ pour l'aluminium $c' = 4,18 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ pour l'eau .

Masses volumiques : $\rho = 2,4.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ pour l'aluminium $\rho' = 1,0.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ pour l'eau



Exercice 9:ex ouvert

La cuisson d'un œuf de poule à la coque dure 3 minutes . Un œuf moyen a une masse comprise entre 53 et 63 g .

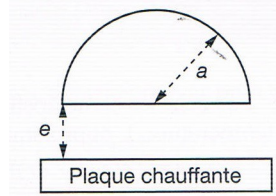
Quelle serait l'ordre de grandeur de la durée pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche, sachant que la masse de celui-ci est comprise entre 1,2 et 1,8 kg .

Exercice 9:approche thermique du phénomène de Leidenfrost .

Lorsqu'on dépose une petite goutte d'eau liquide au-dessus d'une plaque électrique

plane horizontale maintenue à une température T_p nettement supérieure à la température d'ébullition T_c de l'eau, on constate que la goutte peut rester en lévitation quelques dizaines de secondes juste au-dessus de la plaque avant de disparaître : c'est le phénomène de Leidenfrost.

On suppose la goutte hémisphérique de rayon $a(t)$, sa face inférieure étant à une hauteur $e(t)$ au-dessus de la plaque chauffante, supposée confondue avec le plan d'équation $z = 0$.



On modélise le transfert thermique cédé par la plaque à la goutte d'eau liquide en négligeant les phénomènes de convection et de rayonnement : le transfert thermique est dû exclusivement à la diffusion thermique dans la vapeur d'eau, supposée immobile, située entre la plaque et la goutte. On note λ la conductivité thermique, μ_v la masse volumique, c la capacité thermique massique de l'eau liquide et c_v la capacité thermique massique à volume constant de la vapeur d'eau et toutes ces grandeurs sont supposées constantes. On admet que le champ de température est solution de l'équation de la diffusion thermique et on donne l'expression du laplacien d'une fonction

$$f(r, z) \text{ en coordonnées cylindriques: } \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1- Donner l'équation de la diffusion. On introduira la diffusivité thermique D_{th}

2- Dans toute la suite on néglige les dérivées par rapport à r devant les dérivées par rapport à z dans l'expression de ΔT . A quelle condition sur le rapport $\frac{e^2}{a^2}$ peut-on valider cette approximation?

3- Exprimer par une analyse en ordre de grandeur la durée caractéristique τ^* d'un régime transitoire pour l'équation de la diffusion thermique. Dans la suite on raisonne comme si un régime permanent était atteint instantanément et on prend donc $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ dans l'équation de la diffusion thermique. Donner de façon intuitive un critère de

validité de cette approximation mettant en jeu τ^* et la durée de vie τ d'une goutte.

4- Expliciter la solution $T(r, z)$ sachant que la plaque impose $T(r, z = 0) = T_p$ et en supposant que la goutte liquide impose $T(r, z = e) = T_e$ où T_e est la température d'ébullition de l'eau sous une pression P_0 .

5- En déduire l'expression du vecteur densité de flux thermique $\vec{j} = j \vec{e}_z$ en fonction de λ , T_p , T_e , et e .

6- En déduire l'expression du flux thermique Φ reçu par la face inférieure de la goutte liquide en fonction de λ , T_p , T_e , a et e .

7- On suppose désormais que la face supérieure hémisphérique de la goutte n'échange aucun transfert thermique avec l'atmosphère. On suppose dans cette question que la goutte d'eau liquide est plongée dans une atmosphère de vapeur d'eau à la pression uniforme et constante P_0 et que la température dans la goutte liquide est en tout point égale à la température d'ébullition T_e à la pression P_0 . On note l_v l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau sous la pression P_0 . On note Dm la masse de vapeur d'eau formée par seconde.

a- On appelle $m(t)$ la masse d'eau liquide contenue dans la goutte à t . Etablir la relation liant Dm et $\frac{dm}{dt}$.

b- Établir l'expression de Dm en fonction de λ, a, T_p, T_e, e et l_v .

c- En déduire que si μ_l désigne la masse volumique de l'eau liquide, on a:

$$\frac{da}{dt} = \frac{-\lambda (T_p - T_e)}{2e\mu_l l_v}$$

d- On suppose que l'épaisseur e est constante. En déduire la durée de vie τ de la goutte d'eau sachant que $\lambda = 0,1 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $a(0) = 1 \text{ mm}$, $e = 0,3 \text{ mm}$,

$T_p - T_e = 300 \text{ K}$, $l_v = 2,6 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$ et $\mu_l = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Conclure.

Exercice 10 : onde de chaleur

Un matériau solide est caractérisé par sa conductivité thermique λ , sa masse volumique μ et sa chaleur massique c supposées constantes.

1- Etablir l'équation de la diffusion en géométrie plane unidimensionnelle dans le cas de transferts thermiques uniquement diffusifs.

2- Une tige OA, parfaitement calorifugée, est encastrée à son extrémité O ($x = 0$). On notera $T(x, t)$ la température absolue au point M ($x = OM$) de la tige à l'instant t . On soumet l'extrémité O à une excitation thermique sinusoïdale de fréquence f et d'amplitude a ; $T(0, t) = T_0 + a \cdot \cos(2\pi f t)$.

a- On cherche une solution de l'équation de la chaleur obtenue à la question 1 sous la forme complexe

$$T(x, t) = a_0 + a \exp[j(2\pi f t - kx)]. \text{ Exprimer le coefficient complexe } k \text{ et la constante } a_0 \text{ en fonction de } T_0, f \text{ et } K.$$

b- Exprimer la vitesse de propagation de l'onde de chaleur dans la tige en fonction de f et K (diffusivité

thermique).

- c- Calculer en fonction de f et K la distance d'inversion x_i , c'est à dire la distance entre O et le premier point M_i de la tige dont les oscillations thermiques sont en opposition de phase avec celles de l'extrémité O .

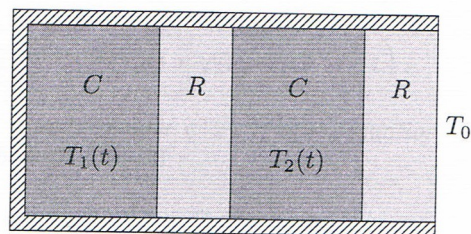
3- Un mur de briques, supposé infini, compris entre les plans $x = 0$ et $x = X$ est soumis à une excitation thermique sinusoïdale par sa face d'entrée $x = 0$ $T(0, t) = T_0 + a \cos(2\pi t/\tau)$ avec une période $\tau = 1$ jour = 86400 s. On donne pour le mur de briques : $\lambda = 1,74 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $c = 800 \text{ J.kg}^{-1}$, $\mu = 2050 \text{ kg.m}^{-3}$ et $X = 38 \text{ cm}$.

- a- Calculer le retard de temps entre la variation journalière de température à l'entrée ($x = 0$) et la variation de température derrière le mur ($x = X$).
- b- Dans quel rapport r ce mur atténue-t-il les variations journalières de la température extérieure.

Exercice 11 : modélisation électrique.

Un système comprend deux solides identiques de capacité thermique C et de conductivité thermique infinie, et de deux conducteurs thermiques de capacité thermique négligeable et de résistance thermique R . L'ensemble est calorifugé sauf

sur une section S d'un conducteur thermique, où l'on impose la température par un thermostat de température T_0 .



1- Quelles sont les conséquences pour un solide d'une conductivité thermique infinie ? D'une capacité thermique négligeable ?

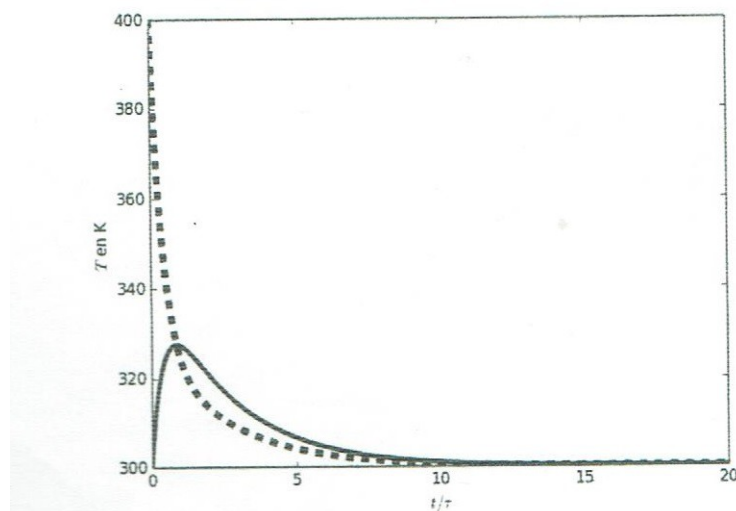
2- Etablir un système d'équations différentielles régissant les températures des deux solides $T_1(t)$ et $T_2(t)$. On posera $RC = \tau$.

3- Donner le schéma d'un circuit électrique équivalent au système thermodynamique décrit ici.

4- Justifiez qu'une solution particulière du système est $T_1 = T_2 = T_0$.

5- A l'instant initial $t = 0$, les températures sont $T_1(0) = T_0 = 300 \text{ K}$ et $T_2(0) = 400 \text{ K}$. On donne les courbes $T_1(t)$ et $T_2(t)$ ci-dessous.

Identifier les courbes et expliquer l'évolution de la courbe en trait plein.



Exercice 12 :échangeur

Un échangeur de chaleur est modélisé par deux conduites parallélipédiques de longueur L et de largeur l .

La conduite supérieure est parcourue par un « fluide chaud » dont la température $T_2(x)$ est supposée ne dépendre que de l'abscisse x le long de la conduite.

On note D_{m2} et c_{p2} les débit et capacité thermique (à pression constante) massiques de ce fluide ces grandeurs sont des constantes du problème.

De même, circule dans la conduite inférieure un « fluide froid » dont les caractéristiques sont données par $T_1(x)$, D_{m1} et c_{p1} .

Les échanges thermiques entre les deux fluides s'effectue par l'intermédiaire d'une plaque d'épaisseur e constituée d'un matériau de conductivité thermique λ , on suppose que la diffusion dans la plaque se fait essentiellement dans la direction (Oz). Les coefficients de transfert aux interfaces plaque – fluide chaud et plaque – fluide froid sont notés h_2 et h_1 (on supposera qu'ils ne dépendent pas de x)

(On négligera tout effet de bord, toute variation d'énergie cinétique ainsi que les transferts par conduction propre à chaque fluide).

1- Exprimer le flux thermique $d\Phi$ transféré du fluide chaud vers le fluide froid à travers un élément de plaque de largeur l et de longueur dx . On donnera le résultat en fonction de $T_2(x) - T_1(x)$. On posera

$$h_{eq} \text{ tel que } \frac{1}{h_{eq}} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{e}{\lambda}.$$

2- Déterminer les répartitions des températures $T_1(x)$ et $T_2(x)$, les températures à l'entrée de l'échangeur ($x = 0$) ayant les valeurs T_{10} et T_{20} .

