Théorème de l'énergie cinétique

PSI - MP : Lycée Rabelais

Position du problème

Le fabricant Lamborghini a commercialisé la voiture Adventador en janvier 2011. Sur le papier, cette Lamborghini affiche une puissance de **700 ch**, un couple moteur maximal de 690 N.m et un 0 à 100 km/h en 2,8 secondes seulement. L'objectif de ce cours est de déterminer l'équation de mouvement qui lie le couple moteur C_m à la vitesse v de la voiture afin de vérifier le critère d'accélération.

FIGURE 1 – Lamborghini Adventador

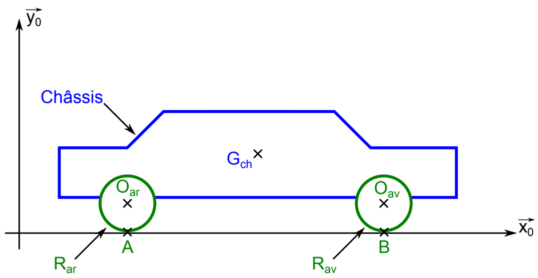


FIGURE 2 – Modèle retenu

La voiture, notée V, est modélisée par un châssis Ch, un couple de deux roues avants R_{av} et un couple de deux roues arrières R_{ar}. Le châssis de la voiture se déplace en translation rectiligne par rapport au sol, noté 0. Les roues avants et arrières sont en liaisons parfaites d'axes respectifs $(O_{av}, \vec{z})$ et $(O_{ar}, \vec{z})$ avec le châssis. Ces roues sont aussi en liaisons avec le sol. Il s'agit de liaisons ponctuelles avec frottement (de type Coulomb) de normale $\vec{y}$ en A et en B.

On considère que la puissance de 700 ch est la puissance fournie par le moteur. La transmission, qui n'est pas parfaite, est modélisée par un rendement noté η. La transmission de puissance peut se schématiser comme ceci :

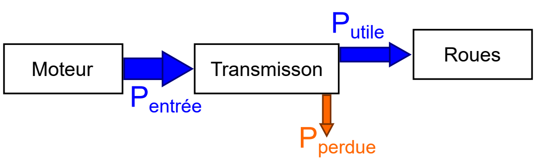


FIGURE 3 – Schématisation du transfert des puissances

Pour trouver l'équation de mouvement, c'est-à-dire l'évolution de v en fonction de C_m notamment, il y a deux possibilités :

- **Solution 1 :** Appliquer le *Principe fondamental de la Dynamique*. Dans ce cas, il faut faire plusieurs isolements et écrire, pour chaque isolement, le théorème adéquat.
- **Solution 2 :** Appliquer le *Théorème de l'énergie cinétique*. Ce théorème, qui sera énoncé ensuite, permet d'écrire directement l'équation de mouvement lorsque le système ne possède qu'une seule mobilité utile !

1 Énoncé du théorème de l'énergie cinétique

1.1 Ça vient d'où ?

L'objet de ce développement n'est pas de fournir une démonstration rigoureuse du théorème de l'énergie cinétique mais simplement d'en expliquer l'origine. Partons du principe fondamental de la dynamique appliqué un solide S assimilé à un point matériel M de masse m :

$$\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to S} = m.\overrightarrow{a}_{M\in S/R}$$

En multipliant l'équation ainsi obtenue par $\overrightarrow{V}_{M\in S/R}$, on obtient :

$$\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to S}.\overrightarrow{V}_{M\in S/R} = m.\overrightarrow{a}_{M\in S/R}.\overrightarrow{V}_{M\in S/R}$$

On reconnait :

- d'une part $\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to S}.\overrightarrow{V}_{M\in S/R} = \mathscr{P}_{\text{ext}\to S/R}$ la puissance *galiléenne* de l'extérieur sur le solide S ;
- d'autre part :

$$\begin{aligned} m.\overrightarrow{a}_{M\in S/R}.\overrightarrow{V}_{M\in S/R} &= m.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\overrightarrow{V}_{M\in S/R}\right]_R.\overrightarrow{V}_{M\in S/R} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{1}{2}.m.\left(\overrightarrow{V}_{M\in S/R}\right)^2\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[E_C(S/R)\right] \end{aligned}$$

1.2 Pour un solide

Dans un référentiel galiléen R et pour un solide S, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\mathscr{P}_{ext\to S/R} = \frac{\mathrm{d}E_C(S/R)}{\mathrm{dt}}$$

$\mathscr{P}_{ext\to S/R}$	Puissance des actions mécaniques extérieures appliquées sur le solide S
$\frac{\mathrm{d}E_C(S/R)}{\mathrm{dt}}$	Dérivée de l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à R

Cette équation est une équation **scalaire** qui lie la puissance des actions mécaniques extérieures appliquées sur le solide S et la variation de l'énergie cinétique du solide S par rapport au temps.

1.3 Pour un ensemble de solides

Dans un référentiel galiléen R et pour un ensemble de solides Σ, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

À retenir

$$\mathscr{P}_{ext\to\Sigma/R} + P_{int} = \frac{\mathrm{d}E_C(\Sigma/R)}{\mathrm{dt}}$$

$\mathscr{P}_{ext\to\Sigma/R}$	Puissance des actions mécaniques extérieures appliquées sur Σ
$\mathscr{P}_{int}$	Puissance des efforts intérieurs au système de solides Σ
$\frac{\mathrm{d}E_C(\Sigma/R)}{\mathrm{dt}}$	Dérivée de l'énergie cinétique de Σ dans son mouvement par rapport à R

Cette équation est une équation **scalaire** qui lie la puissance des actions mécaniques extérieures appliquées sur l'ensemble Σ, les puissances intérieures au système de solides et la variation de l'énergie cinétique de l'ensemble Σ par rapport au temps.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule mobilité utile et qu'on isole l'ensemble de toutes les pièces en mouvement, on obtient directement l'équation de mouvement !

2 Énergie cinétique

2.1 Point matériel

L'énergie cinétique d'un point matériel M, de masse m par rapport à un référentiel galiléen R s'exprime par :

$$E_C(M/R) = \frac{1}{2}\, m\, \left(\overrightarrow{V_{M/R}}\right)^2$$

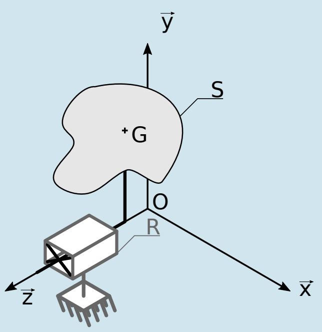
L'unité de l'énergie cinétique est le **kg.m^2.s^{-2}** ou **J** (**Joule**). Cette énergie cinétique est souvent notée E_C mais la notation T est également courante.

Remarque : le carré d'un vecteur est le produit scalaire de celui-ci avec lui-même $(\overrightarrow{u})^2 = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$.

2.2 Mouvement de translation

Soit S un solide quelconque de masse m et de centre d'inertie G en translation (**rectiligne ou non !**) par rapport à un référentiel R.

À retenir



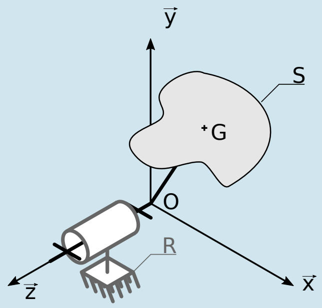
$$\begin{aligned} E_C(S/R) &= \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\overrightarrow{V}_{G\in S/R}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\overrightarrow{V}_{P\in S/R}\right)^2 \end{aligned}$$

NOTA : la formule est bien vraie $\forall P \in S$ car tous les points du solide se déplacent à la même vitesse pour un solide en translation par rapport au référentiel R.

2.3 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Soit S un solide quelconque en rotation autour de l'axe fixe $(O, \overrightarrow{z})$ ayant un moment d'inertie J autour de cet axe de rotation. On note également ω la vitesse de rotation telle que $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \omega \cdot \overrightarrow{z}$.

À retenir

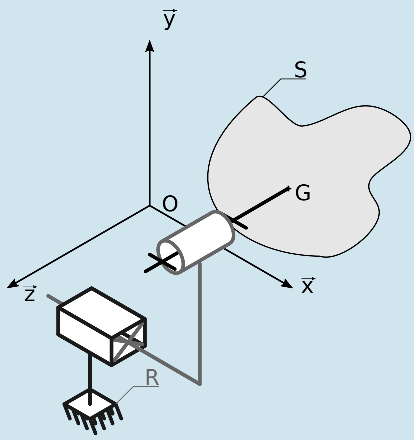


$$E_C(S/R) = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

2.4 Théorème de König

Soit S un solide quelconque de masse m en rotation autour d'un axe $(G, \overrightarrow{z})$. Son moment d'inertie autour de l'axe $(G, \overrightarrow{z})$ est noté J. On note également ω la vitesse de rotation telle que $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \omega \cdot \overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{V}_{G\in S/R} = v \cdot \overrightarrow{x}$

À retenir



$$E_C(S/R) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

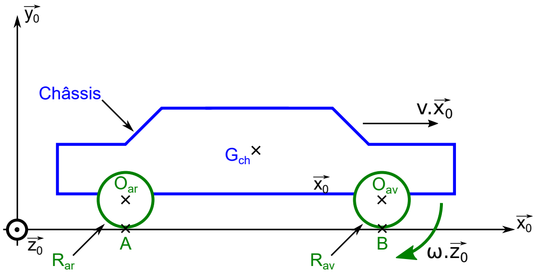
2.5 Cas d'un ensemble de solides

L'énergie cinétique d'un ensemble de solides est égale à la somme des énergies cinétiques de chacun des solides, on a donc pour un ensemble $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$:

À retenir

$$E_C(\Sigma/0) = E_C(S_1/0) + E_C(S_2/0) + E_C(S_3/0) + ...$$

2.6 Application et notion d'inertie équivalente



Reprenons l'exemple de la voiture $V = \{Ch, R_{ar}, R_{av}\}$. On rappelle que :

- Le châssis de la voiture est en translation par rapport au bâti noté 0. Il se déplace à une vitesse v dans la direction $\overrightarrow{x_0}$.
- Les roues avants et arrières R_{av} et R_{ar} de centres d'inertie respectifs O_{ar} et O_{av} sont en liaisons pivots avec le bâti et roulent sans glisser sur le sol de telle sorte que :

$$\overrightarrow{V}_{O_{ar} \in R_{ar}/0} = v \cdot \overrightarrow{x_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega}_{R_{ar}/0} = \omega \cdot \overrightarrow{z_0} \quad \text{avec} \quad v = -R \cdot \omega \quad \text{car roulement sans glissement}$$

$$\overrightarrow{V}_{O_{av} \in R_{av}/0} = v \cdot \overrightarrow{x_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega}_{R_{av}/0} = \omega \cdot \overrightarrow{z_0} \quad \text{avec} \quad v = -R \cdot \omega \quad \text{car roulement sans glissement}$$

- m_{Ch} est la masse du châssis de la voiture ;
- m_R est la masse d'un couple de deux roues (avants ou arrières) et J_R est le moment d'inertie d'un couple de deux roues.

On peut écrire :

$$E_C(V/0) =$$

Avec :

$$E_C(Ch/0) =$$

$$E_C(R_{ar}/0) =$$

$$E_C(R_{av}/0) =$$

On en déduit donc l'énergie cinétique du système complet :

$$E_C(V/0) =$$

On peut écrire $\omega = -\dfrac{v}{R}$ et donc :

$$E_C(V/0) =$$

$$E_C(V/0) =$$

$$E_C(V/0) =$$

M_{eq} est appelée **masse équivalente du système** ramenée au mouvement de translation (ou ramenée au paramètre v). Cela signifie qu'un solide en translation rectiligne se déplaçant à une vitesse v et de masse M_{eq} aurait la même énergie cinétique que la voiture.

On aurait aussi pu écrire $v = -R \cdot \omega$ et donc :

$$E_C(V/0) =$$

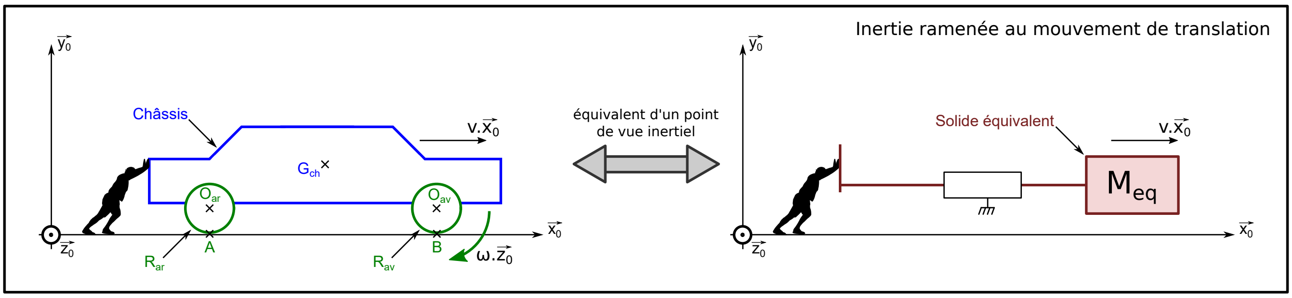
$$E_C(V/0) =$$

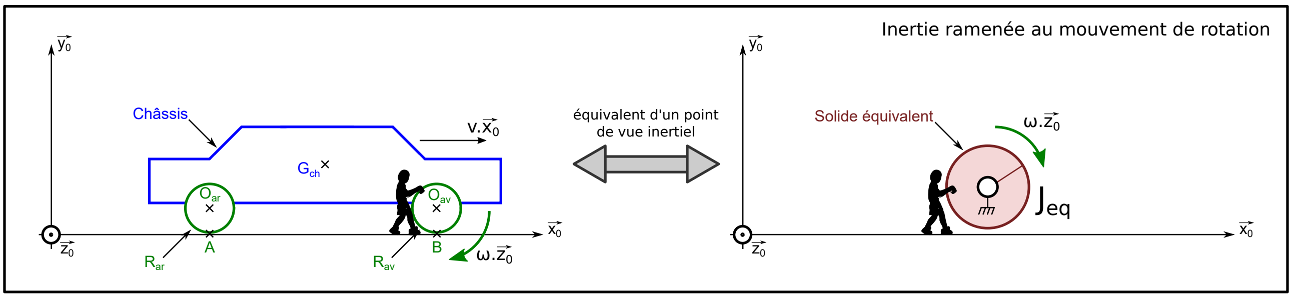
$$E_C(V/0) =$$

J_{eq} est appelé **moment d'inertie équivalent du système** ramené à l'axe de rotation des roues (ou ramené au paramètre ω). Cela signifie qu'un solide en rotation tournant à une vitesse ω et de moment d'inertie J_{eq} aurait la même énergie cinétique que la voiture.

D'un point de vue imagé, on peut se représenter l'inertie équivalente par les schémas ci-dessous. Cela revient à s'imaginer qu'on aurait la même sensation inertielle :

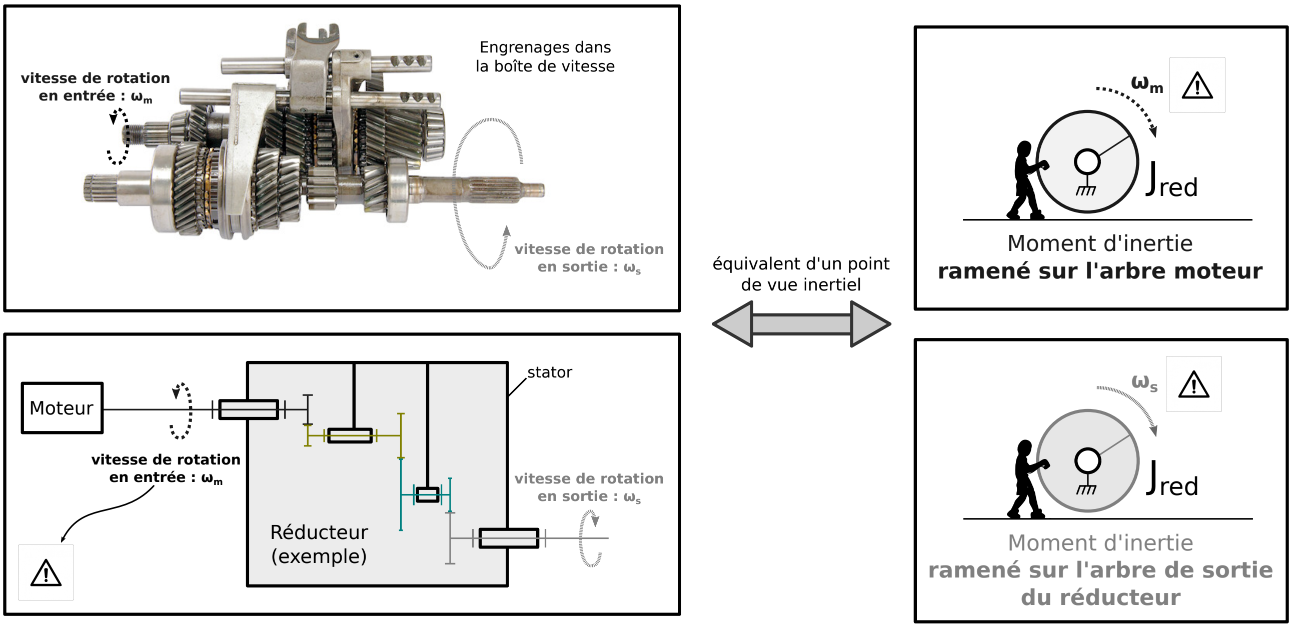
- en déplaçant l'ensemble des pièces,
- en translatant un solide de même masse équivalente
- ou en tournant un solide de même moment d'inertie équivalent.





2.7 Moment d'inertie d'un réducteur

Pour un réducteur, on parlera souvent de l'inertie équivalente de celui-ci sans rentrer dans le détail des engrenages utilisés.



Le sujet indiquera alors si le moment d'inertie équivalent du réducteur est :

- **Ramené sur l'arbre moteur** et dans ce cas :

$$E_C(\text{pièces mobiles du réducteur/stator}) =$$

- **Ramené sur l'arbre de sortie du réducteur** et dans ce cas :

$$E_C(\text{pièces mobiles du réducteur/stator}) =$$

3 Puissances

3.1 Puissance galiléenne d'une action mécanique extérieure sur un solide

3.1.1 Puissance d'une force

À retenir

Soit S un solide quelconque en mouvement dans un référentiel galiléen R et $\overrightarrow{F}_{\text{ext}\to S}$ une force extérieure qui s'applique sur ce solide en un point A. La puissance galiléenne de cette force s'écrira :

$$\mathscr{P}_{\text{ext}\to S/R} = \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to S} \cdot \overrightarrow{V}_{A\in S/R}$$

3.1.2 Puissance d'un couple

À retenir

Soit S un solide quelconque en mouvement dans un référentiel galiléen R et un couple extérieur qui s'applique sur ce solide avec un torseur de la forme :

$$\{\text{ext} \to S\} = \underset{\forall P}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{\text{ext}\to S} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{M}_{P,\text{ext}\to S} = \overrightarrow{C}_{\text{ext}\to S} \end{array} \right.}$$

La puissance galiléenne de ce couple s'écrira :

$$\mathscr{P}_{\text{ext}\to S/R} = \overrightarrow{C}_{\text{ext}\to S} \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$$

L'unité de la puissance (qu'elle soit intérieure ou extérieure) est le **kg . m^2.s^{-3}** ou le **Watt** (**W**).

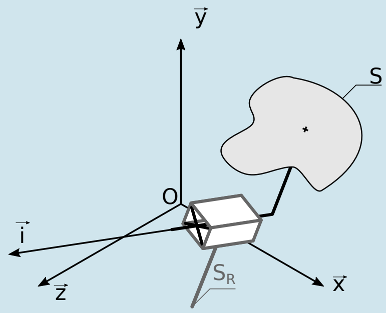
3.2 Puissance des efforts intérieurs (= puissance interne = puissance des inter-efforts)

L'objectif des puissances intérieures est de quantifier la puissance créée ou perdue dans l'isolement. On considère dans l'isolement un solide S_R étant en liaison avec un autre solide S.

À retenir - Liaison parfaite

Pour une liaison parfaite : $\mathscr{P}_{\text{int}} = \mathscr{P}_{S_R \leftrightarrow S} = 0$.

À retenir - Liaison glissière



Pour une liaison glissière de direction $\overrightarrow{i}$ **avec frottement**, où il y a :

- une vitesse $\overrightarrow{V}_{P\in S/S_R} = v.\overrightarrow{i}$ (même vitesse $\forall P$),
- une résultante du solide S_R sur le solide S notée $\overrightarrow{R}_{S_R \xrightarrow{\text{gliss.}} S}$,
- alors :

$$\mathscr{P}_{\text{frottement}} = \mathscr{P}_{S_R \xleftrightarrow{\text{gliss.}} S} = \overrightarrow{R}_{S_R \xrightarrow{\text{gliss.}} S} \cdot \overrightarrow{V}_{P\in S/S_R}$$

Si on écrit alors les torseurs :

$$\mathscr{V}_{S/S_R} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{S/S_R} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}_{P\in S/S_R} = v.\overrightarrow{i} \end{array} \right._{P} \quad \text{et} \quad \{S_R \xrightarrow{\text{gliss.}} S\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{S_R \xrightarrow{\text{gliss.}} S} = (\pm F_r - f.v).\overrightarrow{i} + Y.\overrightarrow{j} + Z.\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{M}_{P, S_R \xrightarrow{\text{gliss.}} S} = L.\overrightarrow{i} + M.\overrightarrow{j} + N.\overrightarrow{k} \end{array} \right._{P}$$

Et donc :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{frottement}} = \pm F_r.v - f.v^2}$$

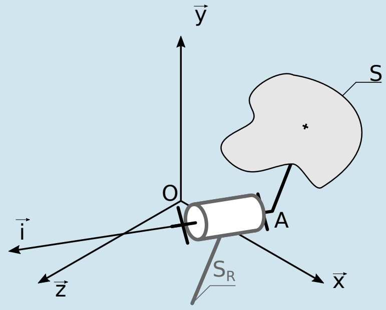
où

- F_r est la force de frottement sec, en **N**, dans la liaison (le signe dépendra du paramétrage et sera choisi de telle sorte que la puissance de cette force de frottement soit négative),
- f est le coefficient de frottement visqueux en **N/(m/s)**.

Si cette liaison glissière est motorisée, de telle sorte que $\overrightarrow{R}_{S_R \xrightarrow{\text{mot.}} S} = F_{\text{mot}}\overrightarrow{i}$ alors :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{motrice}} = F_{\text{mot}}.v}$$

À retenir - Liaison pivot



Pour une liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{i})$ **avec frottement**, où il y a :

- une vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega}_{S/S_R} = \omega . \overrightarrow{i}$ (même vitesse $\forall P \in (A, \overrightarrow{i})$),
- un moment de frottement du solide S_R sur le solide S notée $\overrightarrow{M}_{P, S_R \xrightarrow{\text{piv.}} S}$,
- alors :

$$\mathscr{P}_{\text{frottement}} = \mathscr{P}_{S_R \xleftrightarrow{\text{piv.}} S} = \overrightarrow{M}_{P, S_R \xrightarrow{\text{piv.}} S} \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/S_R}$$

Si on écrit alors les torseurs :

$$\mathscr{V}_{S/S_R} = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{S/S_R} = \omega . \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{V}_{P \in S/S_R} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.} \quad \text{et} \quad \{S_R \xrightarrow{\text{piv.}} S\} = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{S_R \xrightarrow{\text{piv.}} S} = X . \overrightarrow{i} + Y . \overrightarrow{j} + Z . \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{M}_{P, S_R \xrightarrow{\text{piv.}} S} = (\pm C_r - g . \omega) . \overrightarrow{i} + M . \overrightarrow{j} + N . \overrightarrow{k} \end{array} \right.}$$

Et donc :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{frottement}} = \pm C_r . \omega - g . \omega^2}$$

où

- C_r est le couple de frottement sec, en **N.m**, dans la liaison (le signe dépendra du paramétrage et sera choisi de telle sorte que la puissance de ce couple de frottement soit négative),
- g est le coefficient de frottement visqueux en **N.m/(rad/s)**.

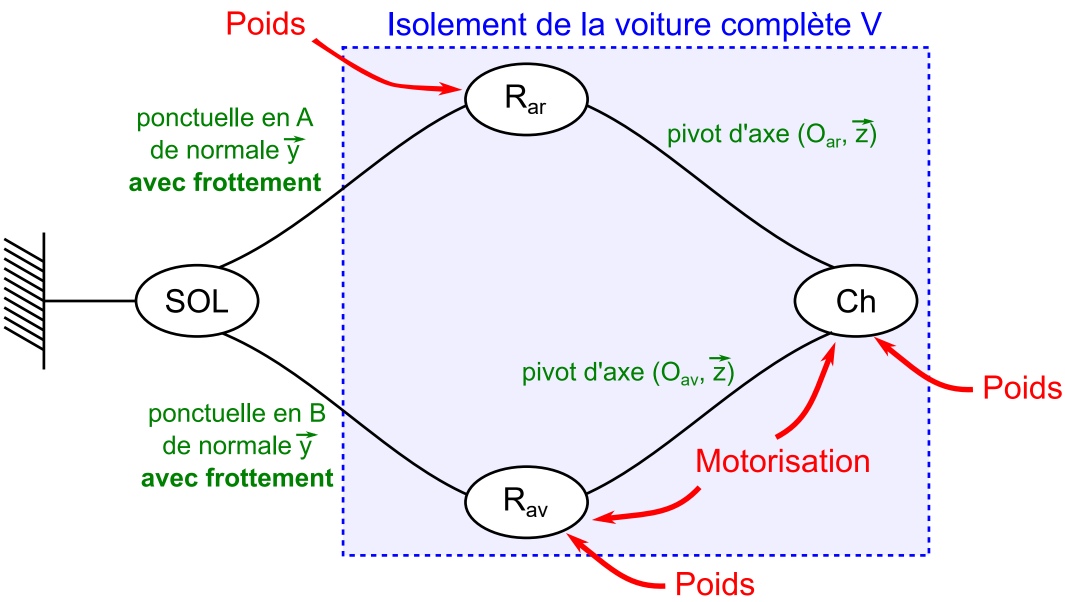
Si cette liaison pivot est motorisée, de telle sorte que $\overrightarrow{M}_{P, S_R \xrightarrow{\text{mot.}} S} = C_{\text{mot}} \overrightarrow{i}$ alors :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{motrice}} = C_{\text{mot}} . \omega}$$

3.3 Application au cas de la voiture

Dans un premier temps, il est intéressant de faire un graphe d'analyse pour ne pas oublier de puissance dans le calcul. Ensuite, il est conseillé de lister les puissances intérieures et extérieures.

L'intérêt du théorème de l'énergie cinétique est qu'il permet d'obtenir directement l'équation de mouvement lorsqu'il n'y a qu'une seule mobilité utile. Pour ce faire, **on isolera l'ensemble de toutes les pièces en mouvement**.

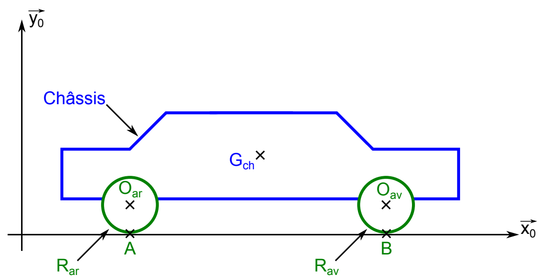


Puissances extérieures :

- $\mathscr{P}_{0\to R_{ar}/0}$
- $\mathscr{P}_{0\to R_{av}/0}$
- $\mathscr{P}_{poids\to V/0}$

Puissances intérieures :

- $\mathscr{P}_{R_{ar}\leftrightarrow Ch}$
- $\mathscr{P}_{R_{av}\leftrightarrow Ch}$
- $\mathscr{P}_{\text{motrice utile}}$



A - Calcul des puissances extérieures :

• $\mathscr{P}_{0\to R_{ar}/0} =$

• De la même manière : $\mathscr{P}_{0\to R_{av}/0} =$

• Calcul de $\mathscr{P}_{poids\to V/0}$

Il est plus judicieux d'écrire la puissance extérieure du poids sur l'ensemble de la voiture comme la somme des puissances sur les différents éléments de la voiture.

$$\mathscr{P}_{poids\to V/0} = \mathscr{P}_{poids\to Ch/0} + \mathscr{P}_{poids\to R_{ar}/0} + \mathscr{P}_{poids\to R_{av}/0}$$

Pour la puissance $\mathscr{P}_{poids\to Ch/0}$, on a :

$P_{poids\to Ch/0} =$

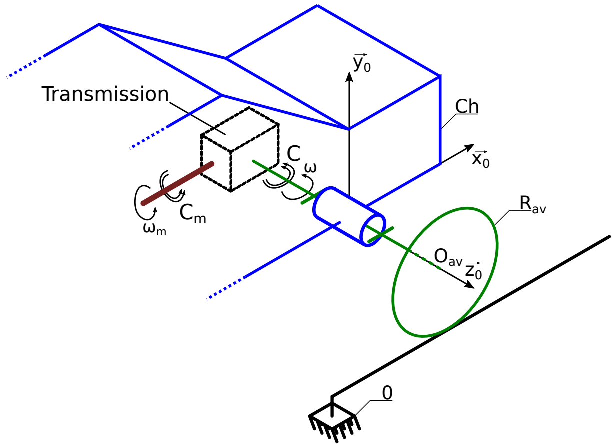
De la même manière : $\mathscr{P}_{poids \to R_{ar}/0} =$ et $\mathscr{P}_{poids \to R_{av}/0} =$.

On a donc :

$$\mathscr{P}_{poids \to V/0} = 0$$

Le poids n'a aucune influence. Ce résultat semble logique puisque le centre d'inertie de la voiture reste à la même altitude !

B - Calcul des puissances intérieures :



3.4 Notion de rendement

Dans certains problèmes, la puissance perdue dans un mécanisme est quantifiée par l'utilisation du rendement η. Normalement, cette définition de rendement n'est valable qu'en régime établi (ou permanent)... mais dans nombre de problèmes, elle est étendue (sans justification) au régime transitoire ! C'est ce qui est fait ici.

Reprenons la figure détaillée en début d'énoncé.

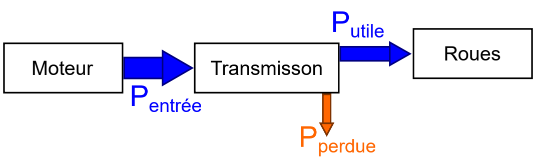


FIGURE 4 – Schématisation du transfert des puissances

La puissance est une grandeur conservative, ce qui implique que :

$$P_{\text{entrée}} =$$

À retenir

Le rendement est défini comme étant le rapport entre la puissance utile en sortie et la puissance utile en entrée. Ce rendement, qui n'a **pas d'unité**, sera toujours inférieur à 1 ! En d'autres termes, le rendement se définit de la manière suivante :

Cette définition du rendement permet également de calculer les pertes dans un mécanismes en écrivant :

On aura donc ici :

Entre la sortie de la transmission et la sortie du moteur, on sait qu'il y a un rapport de réduction r (réduction opérée notamment par la boîte de vitesse). Cela signifie que : $\omega = r\ \omega_m$.

On a donc :

$$C\ \omega = \eta\ C_m\ \omega_m \iff C\ \cancel{\omega} = \eta\ C_m\ \frac{\cancel{\omega}}{r}$$

3.5 Application du théorème de l'énergie cinétique

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne donc :

$$\mathscr{P}_{ext \to V/0} + P_{int} = \frac{\mathrm{d}E_C(V/R)}{\mathrm{dt}}$$
$$\iff$$
$$\cancel{\mathscr{P}_{poids \to V/0}} + \cancel{\mathscr{P}_{0 \to R_{av}/0}} + \cancel{\mathscr{P}_{0 \to R_{ar}/0}} + \mathscr{P}_{Ch \overset{mot}{\longleftrightarrow} R_{av}} + \cancel{\mathscr{P}_{R_{ar} \leftrightarrow Ch}} + \cancel{\mathscr{P}_{R_{av} \leftrightarrow Ch}} = \frac{\mathrm{d}E_C(V/R)}{\mathrm{dt}}$$
$$\iff$$
$$C_m\ \frac{\eta}{r}\ \omega = M_{eq}\ v\ \dot{v}$$

En remplaçant ω par $-v/R$, on obtient :

$$C_m\ \frac{\eta}{r}\ \left(-\frac{v}{R}\right) = M_{eq}\ v\ \dot{v}$$

On obtient bien l'équation de mouvement !