ci0 - Modélisation des systèmes

Dynamique

PSI-MP : Lycée Rabelais

Pré-requis

Cours sur la dynamique (dans des cas particuliers !)

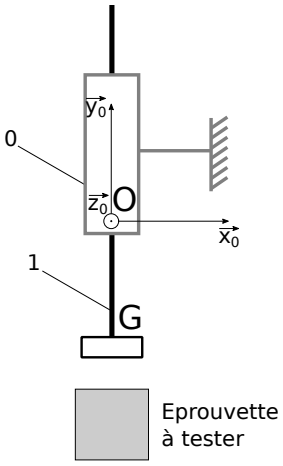
Objectifs

Savoir déterminer une équation de mouvement

Savoir déterminer une action mécanique dans le cas d'un problème de dynamique

1 Machine de traction ★

On s'intéresse ici à une machine de traction. Ce type de machine permet de rompre différentes éprouvettes de tailles, de formes et de matériaux différents. On se place ici en phase d'approche de la machine. Cela signifie que la partie mobile n'est pas encore en contact avec l'éprouvette.



On réalisera les hypothèses suivantes :

- La partie mobile de la machine, notée 1 et associée au repère $(G, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, est en liaison glissière de direction $\vec{y_0}$ avec le support, noté 0 et associée au repère $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$. Cette liaison est une liaison avec frottement. On considèrera un frottement fluide dont le coefficient de frottement est k. On considèrera également un frottement sec constant, noté F_r. Compte-tenu de la liaison, on aura : $(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}) = (\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.
- La partie mobile a une masse m et son centre d'inertie est noté G. On notera $\overrightarrow{OG} = y\vec{y_0}$.
- Un vérin hydraulique met en translation la partie mobile en imposant un effort moteur F_m appliqué au point G.

Question 1. Donner le torseur des actions mécaniques transmissibles pour la liaison glissière entre 0 et 1. Expliciter les unités des différents termes.

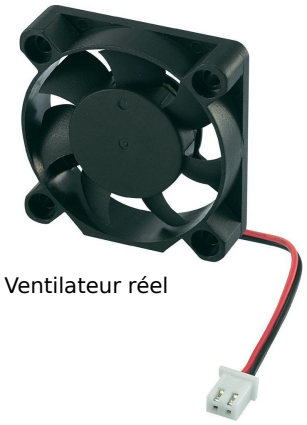
Question 2. Déterminer l'équation de mouvement, c'est-à-dire une relation entre y (et ses éventuelles dérivées) et

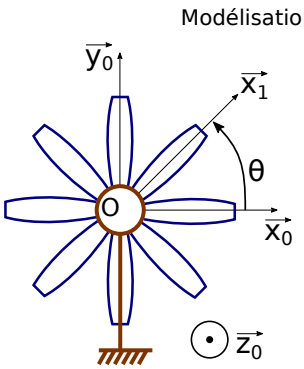
l'effort moteur F_m.

Question 3. Donner l'allure de la vitesse de la partie mobile en fonction du temps pour un effort moteur constant et égal à F_{m0}.

2 Hélice de ventilateur ★

On s'intéresse ici à un ventilateur utilisé pour le refroidissement des ordinateurs. Sur certains ordinateurs haut de gamme, la température à l'intérieur du PC est asservie, ce qui nécessite de réguler la vitesse de rotation du ventilateur. Plus la température est élevée, plus le ventilateur devra tourner rapidement afin d'évacuer de la chaleur de l'enceinte. Afin de mettre en place cet asservissement, il est nécessaire de connaître l'équation de mouvement de l'hélice du ventilateur.


Ventilateur réel



On réalisera les hypothèses suivantes :

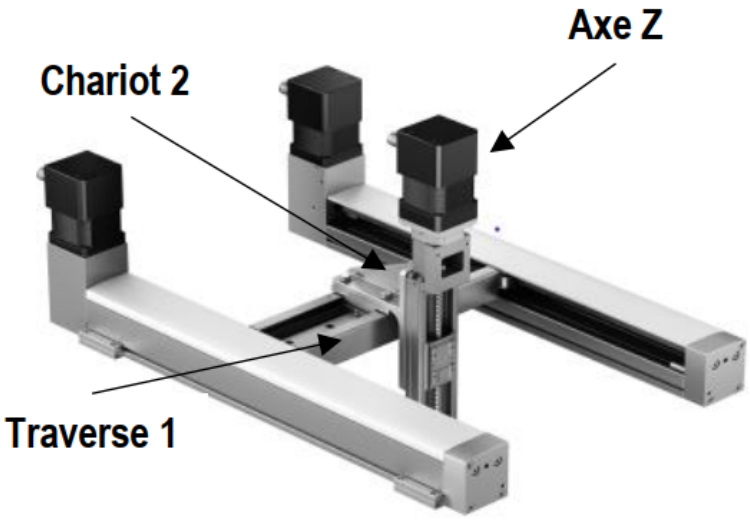
- L'hélice du ventilateur, notée 1 et associée au repère $(G, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ avec le support, noté 0. On notera $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$ avec $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$. Cette liaison est une liaison avec frottement. On considèrera un frottement fluide dont le coefficient de frottement est f. On considèrera également un frottement sec constant, noté C_r.
- L'hélice a une masse m et son centre d'inertie, noté G, est situé sur l'axe de rotation. Son moment d'inertie autour de l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ est noté J.
- Un moteur met en rotation l'hélice en imposant un couple moteur C_m.
- L'air exerce sur l'hélice un couple résistant tel que $\overrightarrow{M}_{O,air\to 1} = -f_{air}\,\overrightarrow{\Omega}_{1/0}$ avec f_{air} un coefficient de frottement visqueux en N.m/(rad/s).

Question 1. Donner le torseur des actions mécaniques transmissibles pour la liaison pivot entre 0 et 1. Expliciter les unités des différents termes.

Question 2. Déterminer l'équation de mouvement, c'est-à-dire une relation entre θ (et ses éventuelles dérivées) et le couple moteur C_m.

Question 3. Donner l'allure de la vitesse de rotation en fonction du temps pour un couple moteur constant et égal à C_{m0}.

3 Manipulateur FESTO EXCM-30 ★★



Robot EXCM-30 équipé d'un troisième axe vertical

Le robot étudié est un robot cartésien deux axes (en robotique, un axe désigne un ensemble formé d'un actionneur, d'un effecteur et de la chaîne de transmission de puissance reliant ces deux composants). Il permet à un chariot d'atteindre une position quelconque dans un plan délimité par les dimensions du manipulateur. La cinématique est assurée par deux moteurs pas à pas qui entrainent une seule courroie crantée comme illustré sur la figure référencée "Annexe 1" et donnée en fin de sujet.

3.1 Élaboration des consignes articulaires

Le pilotage du manipulateur est effectué en envoyant des consignes de position angulaire aux moteurs (appelées consignes articulaires). La connaissance de la position du chariot en fonction des consignes articulaires s'appelle en robotique le modèle géométrique direct.

Le modèle géométrique inverse est utilisé par la partie commande pour déterminer les consignes articulaires à partir de la trajectoire que doit emprunter le chariot.

Pour l'élaboration de ces modèles, on formule les hypothèses que la courroie crantée est inextensible et qu'il n'y a pas glissement entre la courroie et les poulies

3.1.1 Modèle géométrique direct

Dans la suite, pour simplifier les calculs, on ne prend pas en compte les longueurs des portions de la courroie enroulées sur les poulies (ces longueurs étant constantes). La position du chariot dans le plan est connue à partir de la détermination des longueurs ℓx_2 et ℓy_2 des brins de courroie entre respectivement les points $(I;J)$ et $(K;L)$. La construction à une unique courroie impose alors les contraintes géométriques suivantes entre les longueurs des brins de la courroie (Lx,Ly étant des constantes connues).

$$\ell x_1 + \ell x_3 = Lx$$
$$\ell y_1 + \ell y_2 = Ly$$
$$\ell x_1 = \ell x_2$$
$$\ell x_3 = \ell x_4$$

À partir d'une position quelconque du chariot, on introduit une variation de position $\Delta\theta_1$ (respectivement $\Delta\theta_2$) de la poulie motrice 1 (respectivement 2) entraînée par le moteur **M1** (respectivement **M2**).

Il en découle des variations de longueur dans les brins de la courroie, représentées par des variables algébriques, notées respectivement $\Delta\ell u_i$, $u \in \{x; y\}$ et $i \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Toutes les poulies sont de même rayon R_P.

Question 1. En supposant la poulie motrice **P2** bloquée en rotation, analyser la conséquence de la rotation $\Delta\theta_1$ dans le sens positif de la poulie motrice **P1**, sur la longueur de la courroie entre les points A et D. En déduire une relation entre $\Delta\theta_1$, R_P, $\Delta\ell x_1$ et $\Delta\ell y_1$. Procéder de même (en inversant les rôles des poulies motrices **P1** et **P2**) pour obtenir une relation entre $\Delta\theta_2$, R_P, ℓx_2 et ℓy_2.

Question 2. À partir des équations de contrainte géométrique données précédemment, établir les quatre équations de contrainte géométrique entre les variations de longueur $\Delta\ell u_i$.

Question 3. Exprimer alors les variations de longueur $\Delta\ell x_2$ et $\Delta\ell y_2$ des brins de courroie en fonction de R_P, $\Delta\theta_1$ et $\Delta\theta_2$.

3.1.2 Modèle géométrique inverse

Question 4. À partir du résultat de la question précédente, exprimer les consignes articulaires $\Delta\theta_1$ et $\Delta\theta_2$ en fonction des variations de coordonnées du chariot données par $\Delta\ell x_2$ et $\Delta\ell y_2$.

Question 5. Indiquer quel(s) moteur(s) doit (doivent) tourner pour obtenir un déplacement longitudinal du chariot caractérisé par : $\Delta\ell x_2 > 0$ et $\Delta\ell y_2 = 0$. Le cas échéant, préciser le sens de rotation (les valeurs des vitesses de rotation ne sont pas demandées).

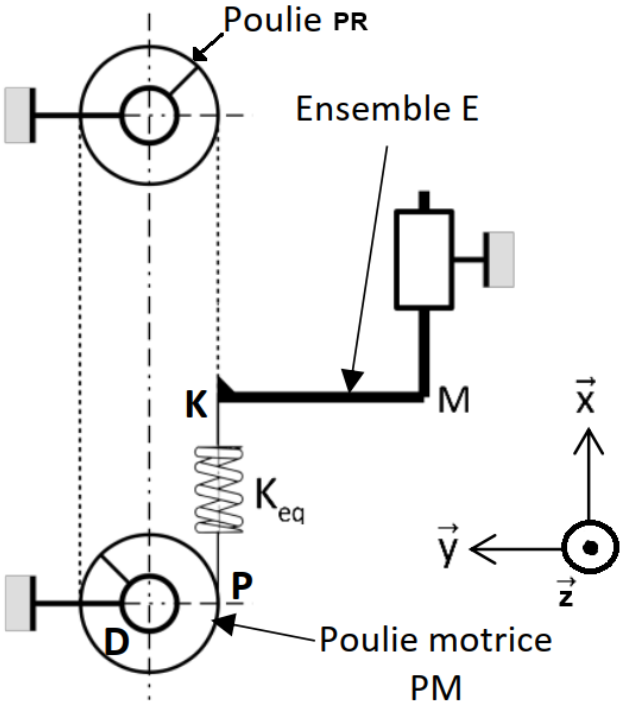
3.2 Modélisation simplifiée de la dynamique du robot

Le manipulateur FESTO est souvent employé dans des applications industrielles nécessitant un positionnement stable, précis et rapide. Dans étudier l'asservissement de position, il pourrait être nécessaire de considérer l'élasticité de la courroie.

Une approche simplifiée est envisagée. On modélise l'ensemble des tronçons de courroie par un ressort de masse négligeable et de raideur K_{eq}, l'ensemble E étant relié à la courroie au point K.

On considère également que la poulie motrice **PM** est encastrée avec le rotor moteur **RM**.

$\overrightarrow{z}$ est la verticale ascendante. On donne également $M_t = 1$ kg, la masse de l'ensemble E.



On donne le paramétrage suivant :

$\{F(\text{stator} \to RM)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_D$ action mécanique exercée par le stator sur le rotor moteur RM

$\{V(PM/0)\} = \begin{Bmatrix} \omega_m \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$ torseur cinématique de la poulie motrice PM par rapport au référentiel bâti 0

x déplacement du point M de l'ensemble E dans le référentiel bâti 0

$\{V(E/0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_x \cdot \vec{x} \end{Bmatrix}_M$ torseur cinématique de l'ensemble E par rapport au référentiel bâti 0, avec

$v_x = \dfrac{dx}{dt}$

x_c déplacement du point de contact P de la courroie avec la poulie motrice PM dans le référentiel bâti 0

$\vec{V}(P, \text{courroie}/0) = v_c \cdot \vec{x}$ vitesse de translation du point P de la courroie par rapport au référentiel bâti 0, avec $v_c = \dfrac{dx_c}{dt}$

$\vec{V}(K, \text{courroie}/E) = \vec{0}$ vitesse relative entre la courroie et l'ensemble E nulle au point K

J_R moment d'inertie de l'ensemble {rotor moteur RM ; poulie motrice PM} (l'inertie de la poulie PR et les masses des tronçons de la courroie sont négligées)

M_t masse totale de l'ensemble E = {traverse ; chariot ; axe Z ; visseuse}

R_p rayon des poulies (D centre de la poulie motrice PM, H centre de la poulie PR)

f_1 coefficient de frottement visqueux modélisant les dissipations dans l'ensemble {moteur ; transmission par poulies-courroie}, ramenées à l'axe moteur, en $N \cdot rad^{-1} \cdot s$

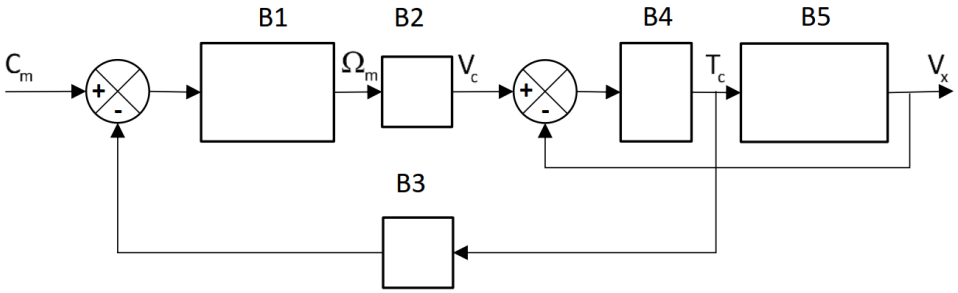
f_2 coefficient de frottement visqueux de la liaison glissière en $N \cdot m^{-1} \cdot s$

Keq raideur **équivalente** de la courroie en $N \cdot m^{-1}$

$\{F(\text{courroie} \to E)\} = \left\{ \begin{matrix} t_c \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_K$ action de la courroie sur l'ensemble E

$\{F(\text{courroie} \to PM)\} = \left\{ \begin{matrix} -t_c \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_P$ action de la courroie sur la poulie motrice PM

Afin de prédire les caractéristiques de l'asservissement en position, une modélisation fine du mécanisme passe par la mise en place du schéma-bloc ci-dessous.



Question 6. Sans calcul, donner la relation entre v_c et ω_m. Compléter, sur le schéma-bloc du sujet, le bloc B2.

Question 7. Déterminer $T_c(p)$ en fonction de $V_c(p)$ et $V_x(p)$. Compléter, sur le schéma-bloc du sujet, le bloc B4.

Question 8. En isolant l'ensemble E et en utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'expression du bloc B5 puis compléter le schéma-bloc.

Question 9. Déterminer les expressions des blocs B1 et B3 puis compléter le schéma-bloc.

On donne ci-dessous la réponse à une rampe de position de 0,1 rad de la poulie motrice et d'une durée de 25 ms.

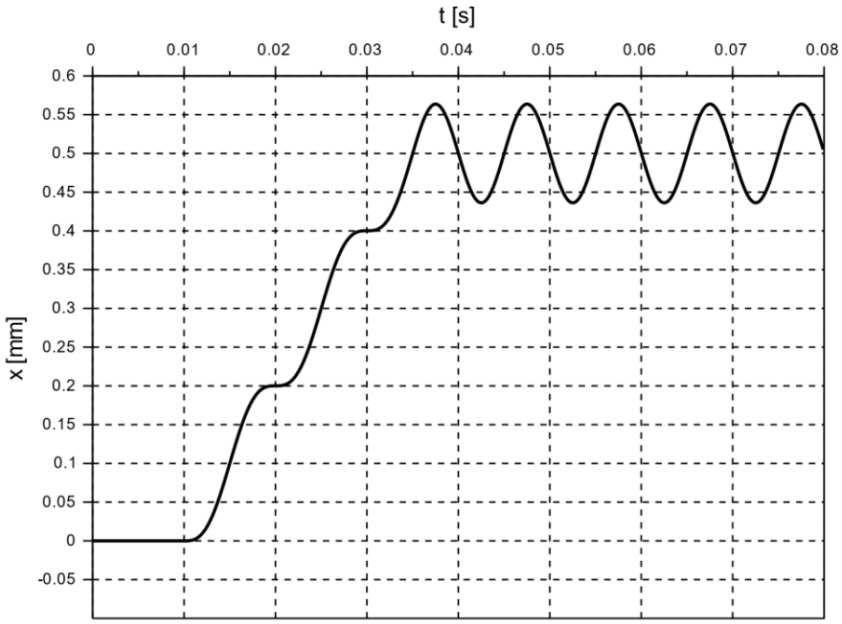


Figure 9 : déplacement (mm) de l'ensemble E après une rampe de position de 0,1 rad d'une durée de 25 ms et retardée de 0,01 s, appliquée à la poulie motrice

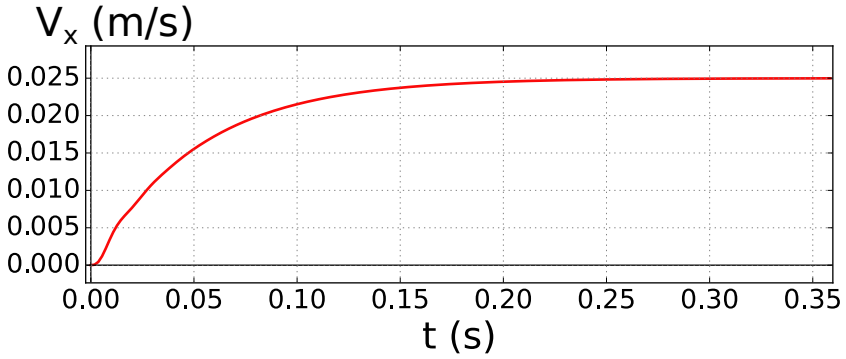
Question 10. Déterminer la valeur de R_P à partir de l'essai précédent.

Question 11. En utilisant les caractéristiques de la réponse dans le régime permanent, déterminer quelle performance sur l'asservissement pourrait être influencée par un tel comportement ?

Question 12. Déterminer la fonction de transfert $\frac{V_x(p)}{\Omega_m(p)}$ puis identifier le coefficient d'amortissement et la fréquence propre. En déduire une valeur pour les paramètres f_2 et K_{eq}. On rappelle que $M_t = 1$ kg.

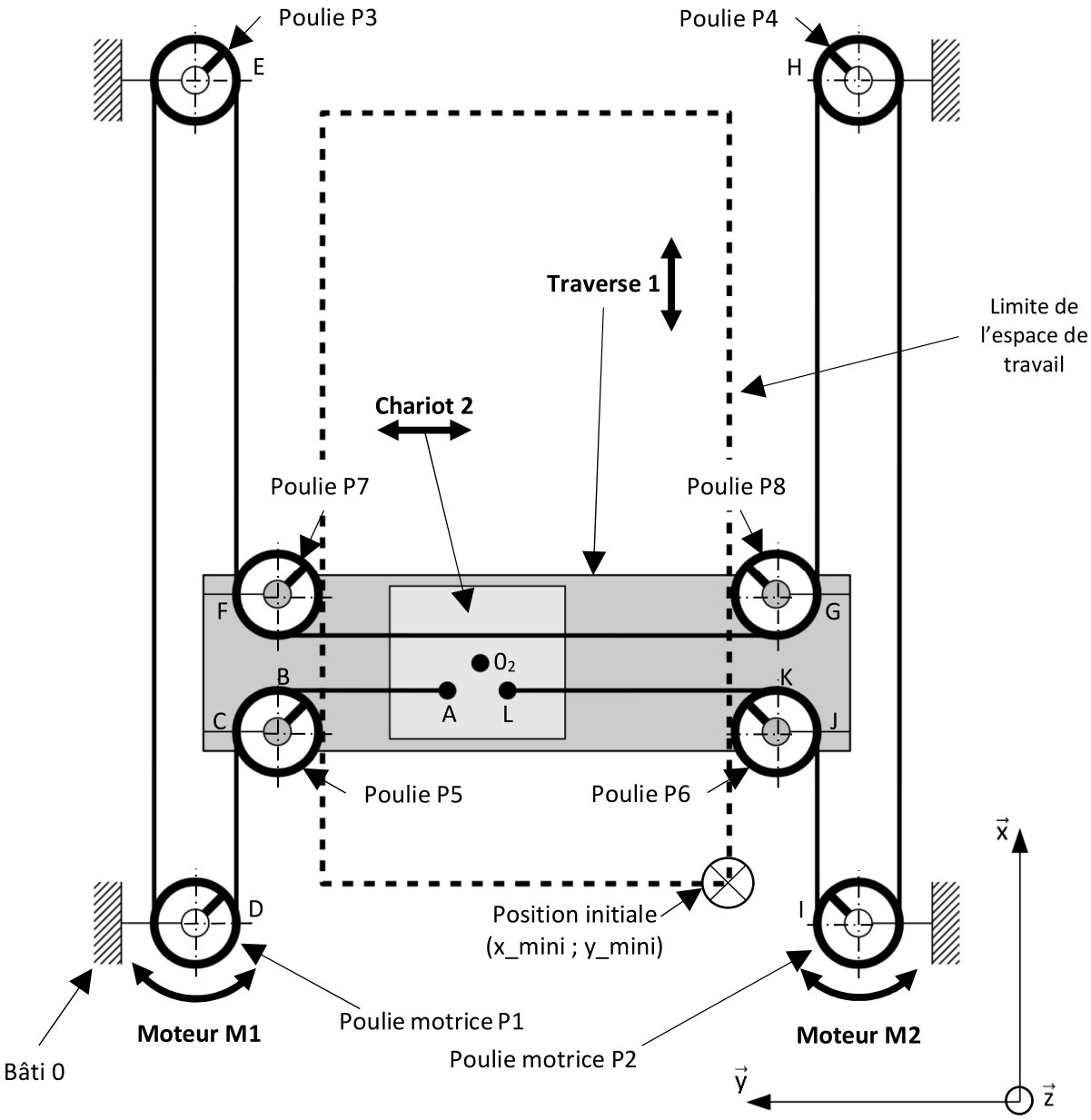
Question 13. En supposant que $f_2 = 0$, déterminer, à partir du schéma-bloc, la fonction de transfert $\frac{V_x(p)}{C_m(p)}$. Donner le résultat sous forme canonique.

On relève finalement la vitesse v_x de l'ensemble E à un échelon de couple C_m et 1,7 N.m.



Question 14. On propose finalement de modéliser la fonction de transfert $\frac{V_x(p)}{C_m(p)}$ par une fonction de transfert d'ordre 1. Identifier les paramètres caractéristiques à partir de l'essai. La prise en compte de l'élasticité de la courroie semble-t-elle nécessaire ?

Annexe 1 : vue de dessus du manipulateur



Remarque :
Les directions $\vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{z}$, à partir desquelles sont définies les variables utilisées dans l'ensemble de l'énoncé, sont représentées dans le coin inférieur droit de la figure ci-dessus.

La courroie crantée est considérée inextensible. Les points B à K reportés sur le schéma ci-dessus correspondent aux points de tangence de la courroie sur les différentes poulies.

On note la longueur des segments de la courroie de la manière suivante :

$CD = \ell x_1$	$IJ = \ell x_2$	$EF = \ell x_3$	$GH = \ell x_4$
$AB = \ell y_1$	$KL = \ell y_2$		