

Dynamique et énergétique

Théorème de l'énergie cinétique

PSI - MP : Lycée Rabelais



Pré-requis

Torseurs cinétiques et dynamiques

Cours sur le théorème de l'énergie cinétique



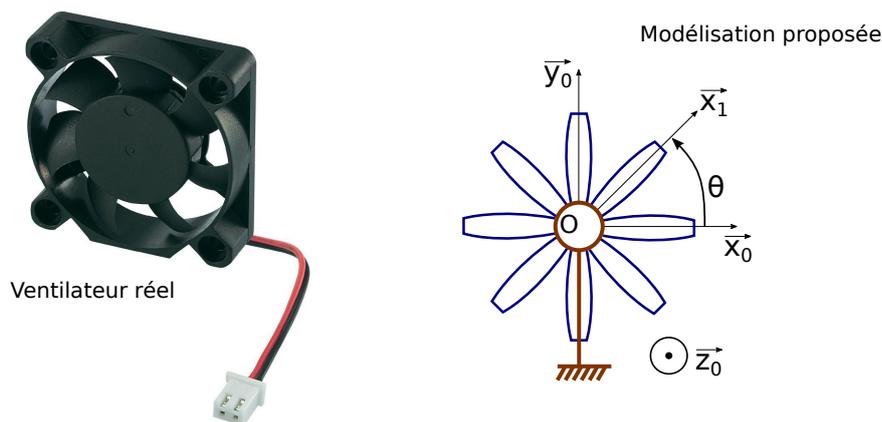
Objectifs

Savoir déterminer une inertie ou une masse équivalente

Savoir déterminer une équation de mouvement avec le théorème de l'énergie cinétique

1 Hélice de ventilateur ★

On s'intéresse ici à un ventilateur utilisé pour le refroidissement des ordinateurs. Sur certains ordinateurs haut de gamme, la température à l'intérieur du PC est asservie, ce qui nécessite de réguler la vitesse de rotation du ventilateur. Plus la température est élevée, plus le ventilateur devra tourner rapidement afin d'évacuer de la chaleur de l'enceinte. Afin de mettre en place cet asservissement, il est nécessaire de connaître l'équation de mouvement de l'hélice du ventilateur.



On réalisera les hypothèses suivantes :

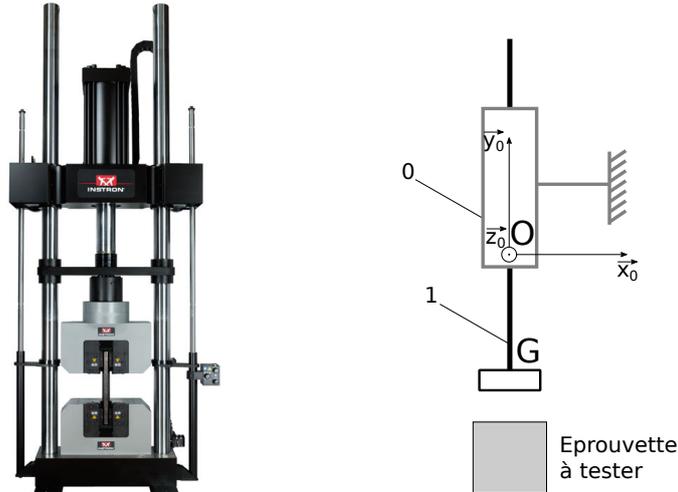
- L'hélice du ventilateur, notée 1 et associée au repère $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le support, noté 0. On notera $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ avec $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$. Cette liaison est une liaison avec frottement. On considèrera un frottement fluide dont le coefficient de frottement est f . On considèrera également un frottement sec constant, noté C_r .
- L'hélice a une masse m et son centre d'inertie, noté G , est situé sur l'axe de rotation. Son moment d'inertie autour de l'axe (O, \vec{z}_0) est noté J .
- Un moteur met en rotation l'hélice en imposant un couple moteur C_m .

- L'air exerce sur l'hélice un couple résistant tel que $\vec{M}_{O,air \rightarrow 1} = -f_{air} \vec{\Omega}_{1/0}$ avec f_{air} un coefficient de frottement visqueux en N.m/(rad/s).

Question : Déterminer l'équation de mouvement, c'est-à-dire une relation entre θ (et ses éventuelles dérivées) et le couple moteur C_m .

2 Machine de traction ★

On s'intéresse ici à une machine de traction. Ce type de machine permet de rompre différentes éprouvettes de tailles, de formes et de matériaux différents. On se place ici en phase d'approche de la machine. Cela signifie que la partie mobile n'est pas encore en contact avec l'éprouvette.



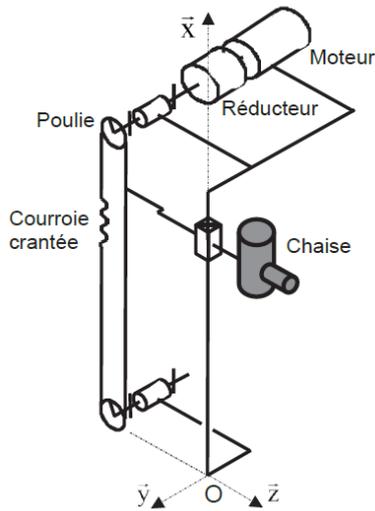
On réalisera les hypothèses suivantes :

- La partie mobile de la machine, notée 1 et associée au repère $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, est en liaison glissière de direction \vec{y}_0 avec le support, noté 0 et associée au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Cette liaison est une liaison avec frottement. On considèrera un frottement fluide dont le coefficient de frottement est k . On considèrera également un frottement sec constant, noté F_r . Compte-tenu de la liaison, on aura : $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- La partie mobile a une masse m et son centre d'inertie est noté G . On notera $\vec{OG} = y\vec{y}_0$.
- Un vérin hydraulique met en translation la partie mobile en imposant un effort moteur F_m appliqué au point G .

Question : Déterminer l'équation de mouvement, c'est-à-dire une relation entre y (et ses éventuelles dérivées) et l'effort moteur F_m .

3 Découpe de pare-chocs pour l'automobile ★

Sur une chaîne de montage, on cherche à automatiser le positionnement de pare-chocs dans le but de procéder à leur découpe. Le paramétrage de la transformation de mouvement est donné ci-dessous. La chaise permet le maintien d'une partie du pare-chocs.



C_m : couple électromécanique moteur
 P_{max} : la puissance maximale du moteur

ω_m : vitesse angulaire arbre moteur
 ω_p : vitesse angulaire poulie
 V : vitesse linéaire du module
 γ : accélération du module

J_m : moment d'inertie de l'arbre moteur
 J_p : moment d'inertie d'une poulie
 J_r : moment d'inertie du réducteur ramené à l'arbre moteur
 M : masse équivalente de la partie en mouvement **de translation**

R_p : rayon primitif d'une poulie crantée

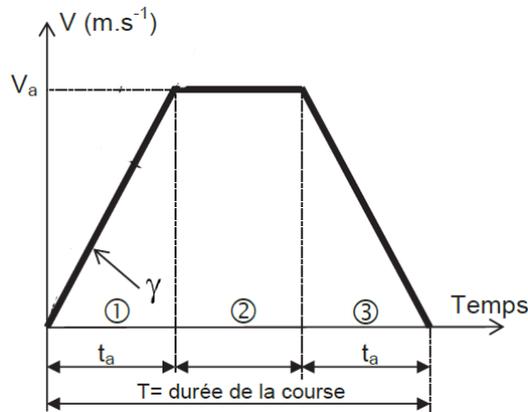
r : rapport de réduction $r = \frac{\omega_p}{\omega_m}$

η : rendement du réducteur

Les solides sont considérés indéformables. Les efforts dus aux frottements secs et visqueux sont négligés, les liaisons sont considérées parfaites. Seul le rendement η du réducteur est considéré comme différent de 1.

Question 1. Donner l'expression littérale du moment d'inertie total équivalent J_{Teq} ramené à l'arbre moteur dans le cas du mouvement vertical. Faire l'application numérique. $J_m = 0,3 \text{ g.m}^2$; $J_r = 0,022 \text{ g.m}^2$; $J_p = 3 \text{ g.m}^2$; $R_p = 16 \text{ mm}$; $r = 1/5$; $M = 10 \text{ Kg}$.

La loi de mouvement désirée qui minimise la puissance maximale demandée au moteur lors du déplacement est définie par la figure ci-dessous. Il s'agit d'une loi de vitesse de type « trapèze » permettant un meilleur comportement thermique du moteur. L'ensemble « moteur et variateur » doit pouvoir supporter le cycle prévu sans échauffement anormal. Classiquement, les constructeurs de moteurs préconisent d'utiliser une règle d'équirépartition des temps d'accélération, de vitesse constante et de décélération. C'est ce que l'on va montrer ici.



On fait l'hypothèse que le couple résistant est nul. Le déplacement total pendant la durée T est noté X .

Question 2. Donner l'expression de V en fonction de ω_m , R_p et r .

Question 3. Déterminer le déplacement X de la chaise durant un trapèze de vitesse en fonction de T , t_a et la vitesse maximale V_a

Question 4. Écrire l'expression du couple moteur C_m requis en phase d'accélération.

Question 5. Donner la relation liant la puissance fournie par le moteur P_m en fonction de C_m et ω_m . A quel instant du trapèze de vitesse cette puissance est maximale (cette puissance sera notée P_{max} ?

Question 6. Montrer, qu'en l'absence du couple résistant lié à la pesanteur, P_{max} peut s'écrire $P_{max} = A \frac{X^2}{t_a(T - t_a)^2}$.

Donner l'expression de A .

Question 7. Déterminer la (ou les) valeur(s) de t_a qui minimise(nt) P_{\max} . Conclure.

Le couple maximal du moteur utilisé est de 4,2 N.m. Sa fréquence de rotation maximale est de 3000 tr/min. On prend maintenant en compte le couple résistant C_r , dû aux actions de pesanteur et ramené à l'arbre moteur. On prendra également : $J_{Teq} = 6.644.10^{-4}$ kg.m². Pour respecter les cadences sur la chaîne de production, on souhaite que la chaise se translate de 0,65 m en moins de 1 secondes.

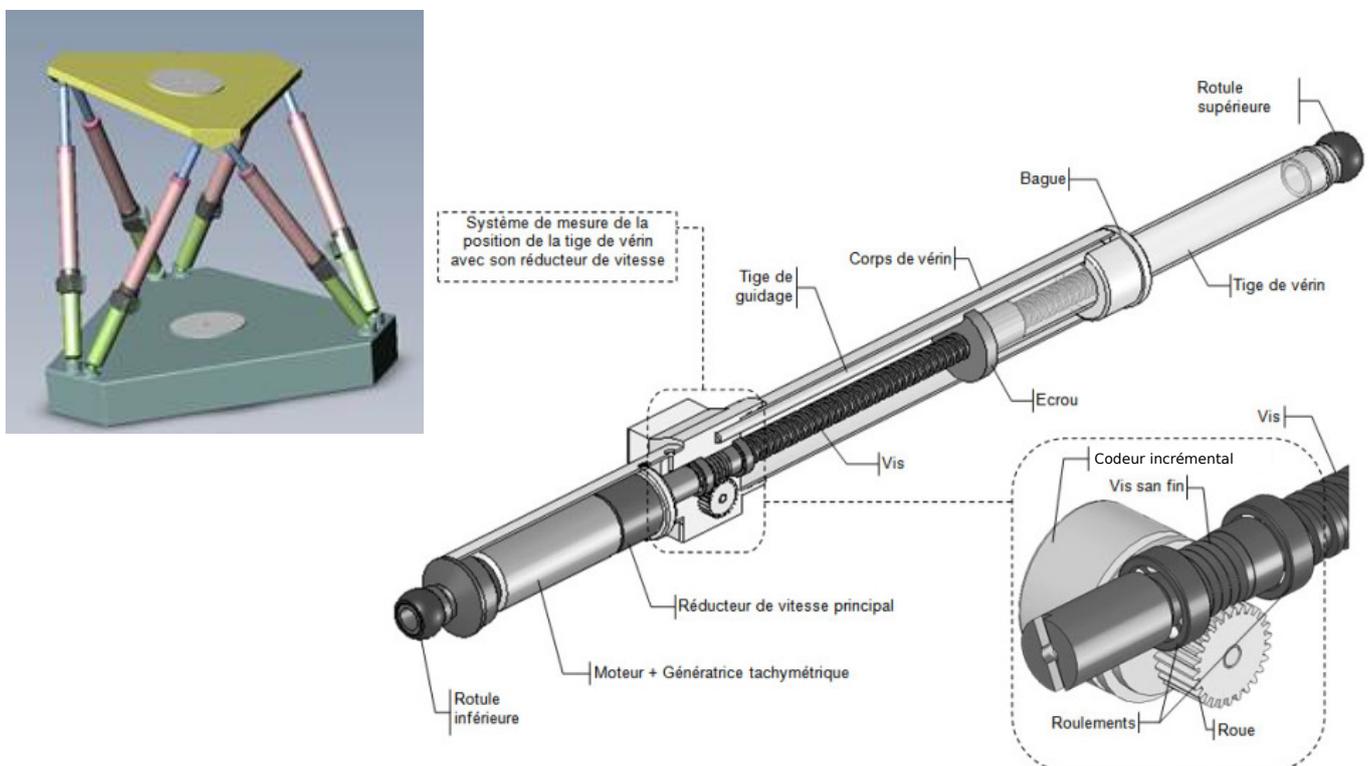
Question 8. Dans cette configuration d'équirépartition des différentes phases, le moteur choisi permet-il de vérifier la cadence imposée ?

4 Vérin d'une plate-forme 6 axes ★★

Les mécanismes de type 6 axes sont largement utilisés dans l'industrie. Ils sont composés d'une plate-forme mobile par rapport à un bâti. Cette plate-forme mobile est maintenue par 6 vérins linéaires. Une application récurrente est celle des simulateurs. Ce type de géométrie permet en effet tous les mouvements de la plate-forme mobile par rapport au bâti.

Afin de commander avec précision une plate-forme 6 axes, il est nécessaire de contrôler avec précision chacun des vérins linéaires. Ici on s'intéresse à une plate-forme basée sur une alimentation électrique. Les vérins sont composés :

- D'un corps de vérin (noté 0), que l'on supposera fixe dans l'étude ;
- D'un ensemble moteur et réducteur ;
- D'une vis principale (notée 1) ;
- D'un écrou (noté 2) sur lequel est solidarisé la tige du vérin ;
- D'un système de mesure composé lui-même d'une vis sans fin et d'une roue dont l'axe est solidaire de celui d'un potentiomètre.



Afin d'identifier le comportement du vérin, on place celui-ci dans une position verticale. Le corps du vérin est donc immobile. On fixe également sur la tige du vérin un solide de masse m .

On donne ci-dessous l'ensemble des paramètres liés aux différents éléments du système :

Élément	Paramétrage
Moteur	J_m : moment d'inertie de l'axe moteur
Réducteur	J_r : moment d'inertie du réducteur ramené sur l'axe de rotation de la vis r : rapport de réduction du réducteur
Vis	J_v : moment d'inertie de la vis autour de son axe de rotation m_v : masse de la vis p_v : pas de la vis
Écrou et tige du vérin	m_e : masse de l'ensemble {écrou + tige du vérin }
Masse additionnelle	m : masse additionnelle fixée sur la tige du vérin

On néglige l'inertie associée à la mesure avec la roue codeuse.

On suppose que l'ensemble des frottements dans le système peut se ramener à un seul frottement de type frottement visqueux ramené sur l'axe moteur et de coefficient de frottement f (en N.m/(rad/s)).

On note A , le point en extrémité de la tige du vérin et $\vec{V}_{A \in 2/0} = v \vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur unitaire orienté dans la direction du vérin. On note également ω_m , la vitesse de rotation du moteur.

On suppose que le moteur exerce un couple moteur C_m .

Détermination de l'équation de mouvement :

Question 1. Déterminer la relation entre v et ω_m .

Question 2. Déterminer ensuite le moment d'inertie équivalent de l'ensemble en mouvement ramené sur l'arbre moteur.

Question 3. Déterminer enfin l'équation de mouvement.

Moyen de mesure :

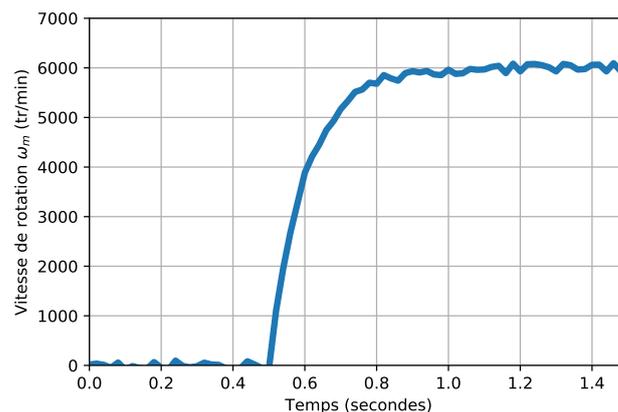
La mesure de la position angulaire de la vis se fait grâce à un codeur incrémental, entraîné par l'intermédiaire d'un dispositif {roue + vis sans fin } dont la vis est montée sur l'arbre de sortie du réducteur ; le rapport de transmission associé est $r_c = \frac{\omega_{\text{roue codeuse/corps vérin}}}{\omega_{\text{vis/corps vérin}}} = 1/10$. Le pas de la vis est de 1 mm.

Le capteur incrémental, muni de 512 fentes, est équipé d'une seule voie de mesure permettant la détection des fronts montants et descendants.

Question 4. Quelle est la résolution théorique en translation de cet axe motorisé ?

Identification :

On réalise un essai avec une masse additionnel de 3 kg. Dans ces conditions, il est possible de négliger la masse de l'ensemble {écrou + tige}. On impose un échelon de couple de 0,1 N.m et on sait que le rapport de réduction du réducteur associé à l'arbre moteur est $r = 1/10$. Le résultat de l'essai, représentant l'évolution de la vitesse de rotation du moteur en fonction du temps, est donné ci-dessous :



Question 5. Montrer dans ces conditions que l'on peut négliger le couple résistant lié à l'action de la pesanteur.

Question 6. D'après le résultat donné, donner la valeur du coefficient de frottement visqueux équivalent et du moment d'inertie équivalent.

Question 7. Pour un couple de 0,1 N.m, quelle sera alors la vitesse en régime établi v en sortie de tige ? Quelle sera également la vitesse en régime établi $\omega_{\text{roue codeuse/corps vérin}}$?

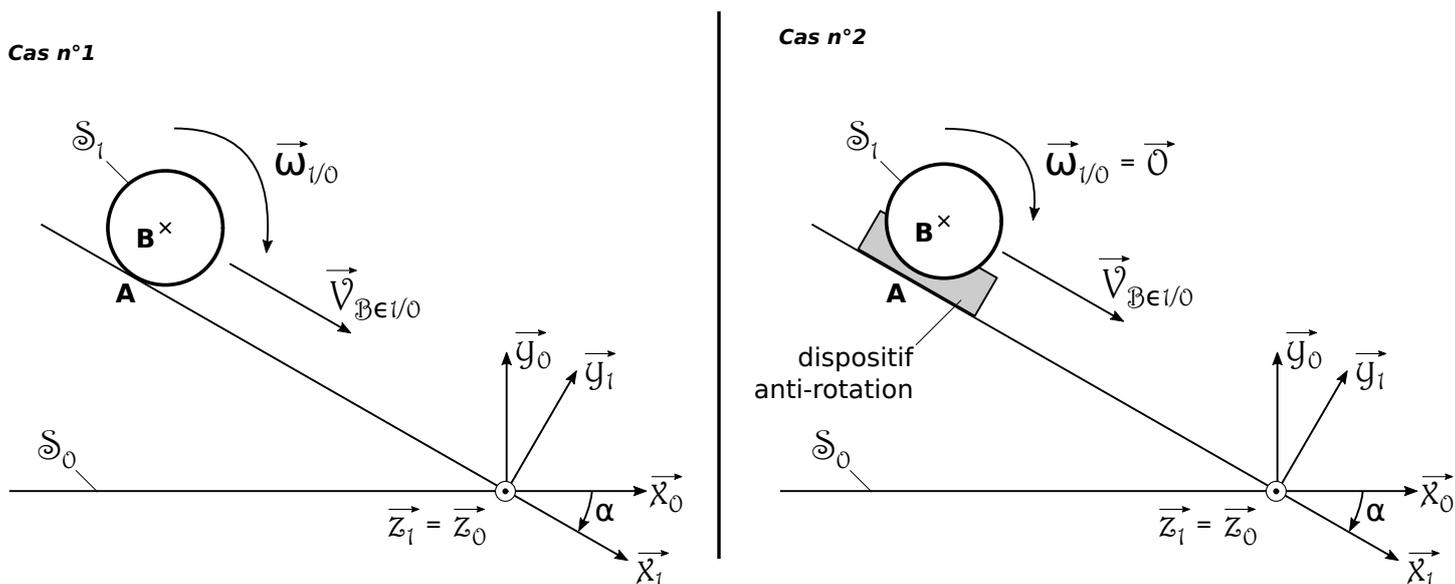
Question 8. Le codeur impose que la fréquence d'échantillonnage soit au moins 10 fois supérieure à la fréquence du signal à mesurer. Quelle fréquence d'échantillonnage faudrait-il utiliser ? Conclure sur le compromis à trouver sur le rapport de réduction r_c .

5 Petite devinette ★

On considère deux cylindres pleins (notés \mathcal{S}_1), de masse m , de rayon R , de centre de gravité B , et dont le moment d'inertie autour de l'axe (B, \vec{z}_0) est J . Ces cylindres sont lâchés exactement au même moment sur un plan incliné (noté \mathcal{S}_0) - la verticale ascendante est \vec{y}_0 . On note α l'angle d'inclinaison (ici $\alpha < 0$).

Deux cas de figure sont possibles :

- **Cas 1 :** le cylindre roule sans glisser sur le plan incliné. On note la vitesse de rotation $\vec{\omega}_{1/0} = \omega \cdot \vec{z}_0$ et la vitesse $\vec{V}_{B \in 1/0} = v \cdot \vec{x}_1$.
- **Cas 2 :** un dispositif anti-rotation, de masse négligeable, bloque le cylindre qui se translate alors sur le plan incliné. Les frottements de contact sont négligeables. On a alors $\vec{\omega}_{1/0} = \vec{0}$ et la vitesse $\vec{V}_{B \in 1/0} = v \cdot \vec{x}_1$.



Devinette - Dans quel cas le cylindre arrive en premier en bas du plan incliné ?