

DM SCIENCES PHYSIQUES N°4

PROBLÈME 1: Le manchot empereur (obligatoire)

Source : Gilbert C. *et al.*, Energy saving processes in huddling emperor penguins : from experiments to theory, *Journal of Experimental Biology*, vol. 211, 2008, p. 1-8.

Le manchot empereur *Aptenodytes forsteri* est la plus grande espèce de manchots, avec en moyenne une taille de 1,2 m et une masse corporelle de 30 kg. Ce manchot est capable d'affronter sur de longues durées les conditions climatiques extrêmes de l'Antarctique, caractérisées par des températures moyennes de - 40 °C lors des longues nuits polaires du mois de juin et des températures ressenties atteignant les - 200 °C lorsque le blizzard souffle au plus fort. Le secret de cette exceptionnelle capacité d'isolation thermique réside dans toute une série d'adaptations, en particulier physiologiques et comportementales.

Du point de vue des échanges thermiques, on modélise un manchot par un cylindre d'axe $(O, \vec{u}_z)$, de rayon $R = 10$ cm, de longueur $l = 1,2$ m, recouvert successivement :

- d'une couche de graisse d'épaisseur $e_g = 2,0$ cm et de conductivité thermique $\lambda_g = 0,20$ W.m⁻¹.K⁻¹ ;
- d'une couche de filaments duveteux enfermant une épaisseur $e_a = 1$ cm d'air de conductivité thermique $\lambda_a = 0,026$ W.m⁻¹.K⁻¹ ;
- d'une couche très dense de plumes courtes et raides, disposées en diagonale et imbriquées les unes dans les autres pour former un véritable « coupe-vent » imperméable à l'eau, d'épaisseur $e_p = 2,0$ cm et de conductivité thermique $\lambda_p = 0,035$ W.m⁻¹.K⁻¹ .

En régime stationnaire, le métabolisme de l'animal fournit une puissance P_m permettant de maintenir sa température interne T_i constante.

I- Généralités

On considère deux cylindres de même axe $(O, \vec{u}_z)$, de longueur l et de rayons R_1 et R_2 , de surfaces latérales isothermes portées aux températures respectives T_1 et T_2 (**figure 1**).

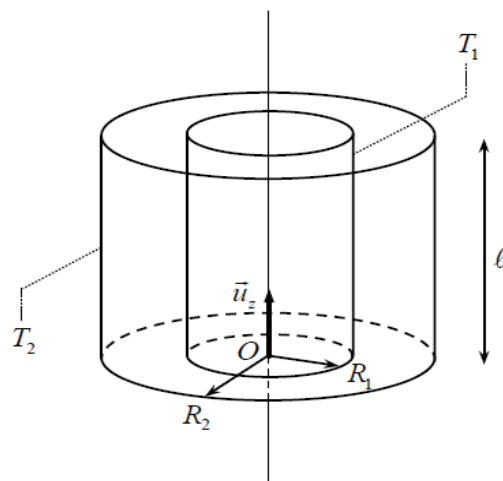


Figure 1

Le milieu séparant ces deux surfaces, homogène, isotrope, de conductivité thermique λ , est le siège d'un phénomène de transfert thermique uniquement radial en négligeant tout effet de bord. On suppose le régime stationnaire atteint. En tout point M du milieu, repéré par ses coordonnées cylindriques dans le repère $(O; \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, la température y est donc fonction uniquement de la distance ρ à l'axe $(O; \vec{u}_z)$.

1- Le vecteur associé au flux thermique Φ_{th} est le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$. Que représente physiquement la norme de ce vecteur ? Préciser son unité.

2- Justifier que $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} \vec{u}_\rho$. Justifier physiquement le signe moins.

3- Effectuer en régime stationnaire un bilan thermique, entre les instants t et $t+dt$, pour la portion du milieu comprise entre les cylindres d'axe $(O, \vec{u}_z)$, de longueur l , de rayons ρ et $\rho+d\rho$ ($R_1 < \rho < R_2$). En déduire que l'expression du champ de température $T(\rho)$ en tout point M du milieu

$$\text{est : } T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln\left(\frac{\rho}{R_1}\right) + T_1.$$

4- Définir la résistance thermique R_{th} du milieu et déterminer son expression.

II - Détermination du métabolisme d'un manchot

5- Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur adoptée du rayon R du cylindre modélisant un manchot supposé uniquement constitué d'eau.

6- En régime stationnaire, justifier que le flux thermique Φ_{th} dégagé par un manchot est égal à la puissance P_m due à son métabolisme.

7- Comment sont associées les résistances thermiques de chacune des couches recouvrant un manchot ? Justifier. À partir du résultat de 4, donner l'expression de la résistance thermique R_{th1} équivalente à cette association en fonction notamment des conductivités thermiques et des épaisseurs des différentes couches. Calculer la valeur de R_{th1} .

8- Les transferts thermiques entre la face extérieure du plumage du manchot à la température T_p et l'air extérieur à la température T_e sont modélisés par la loi de Newton. On note h le coefficient de transfert conducto-convectif. Exprimer le flux thermique sortant par conducto-convection de la surface latérale d'aire S du manchot. En se limitant à la surface latérale du cylindre d'aire S modélisant le manchot, exprimer en fonction de h et S la résistance thermique, R_{thcc} associée à ce transfert.

9- En considérant que le manchot et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs de températures respectives T_p et T_e très proches, on admet que le flux radiatif surfacique (flux surfacique sortant par rayonnement par la surface extérieure du manchot) ϕ_r émis par le manchot, s'écrit :

$$\phi_r \approx 4\sigma T_e^3(T_p - T_e) \text{ où } \sigma \text{ est la constante de Stefan.}$$

Exprimer, en fonction de σ , T_e et S la résistance thermique R_r associée à ce transfert si on se limite ici aussi à la surface latérale du cylindre modélisant le manchot.

10- Comment sont associées les résistances thermiques correspondant aux transferts conducto-convectifs et radiatifs ? Justifier. Donner l'expression de la résistance thermique R_{th2} équivalente à cette association en fonction de σ , T_e , h et S . Calculer la valeur de R_{th2} lorsque le manchot se trouve dans un environnement à la température $T_e = -17^\circ C$ en présence d'un vent de vitesse $V = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$. On admettra que le coefficient de transfert conducto-convectif s'écrit : $h = 5,7 + 3,5V$ où V est exprimé en m.s^{-1} et h en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

11- Donner l'expression en la justifiant de la résistance thermique totale R_{thtot} du manchot en fonction de R_{th1} et R_{th2} . En déduire la valeur de la puissance P_m due au métabolisme nécessaire à un manchot pour maintenir une température inter $T_i = 37,7^\circ C$ dans un environnement à la température $T_e = -17^\circ C$ et en présence d'un vent de vitesse $V = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$. Vérifier que la puissance P_m est de l'ordre de 50 W.

En plus de ses exceptionnelles capacités d'isolation thermique, le manchot empereur a développé une ultime stratégie pour réduire ses déperditions de chaleur : la thermorégulation sociale consistant à s'assembler en très grands groupes compacts de plusieurs centaines d'individus. Des travaux de recherche menés en 2007 par l'équipe française de Caroline Gilbert ont évalué expérimentalement les bénéfices de ce comportement. Ils ont pour cela mesuré la puissance P_m due au métabolisme sur trois groupes de manchots, à partir de leur perte de poids en fonction du temps. Les premiers étaient seuls, isolés dans des enclos. Les seconds étaient parqués dans des enclos par petits groupes de 5 à 10 individus. Les troisièmes étaient libres de se déplacer et pouvaient s'assembler en très grands groupes. Les trois populations étaient soumises aux mêmes conditions d'environnement : température extérieure moyenne de $-17\text{ }^{\circ}\text{C}$ et un vent moyen de $5,0\text{ m.s}^{-1}$. Le tableau suivant rassemble leurs observations.

	Isolé	Petits groupes	Grands groupes
P_m (W)	85	52	43

12- À la lumière des résultats de l'équipe de recherche de Caroline Gilbert, discuter la modélisation effectuée dans cette partie. Expliquer brièvement pourquoi les grands rassemblements de manchots réduisent la puissance due à leur métabolisme.

Problème 2 :(facultatif correction fournie à la demande)

Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme scipy) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques . . . On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales »

La fonction d'erreur de Gauss : erf()

A- Introduction au problème de Stefan

Un certain nombre de problèmes géologiques importants peuvent être modélisés par le chauffage ou le refroidissement instantané d'un demi-espace semi-infini. Au milieu du XIXème siècle Lord Kelvin a ainsi utilisé cette idée pour estimer l'âge de la Terre. Il supposa qu'à la surface le flux d'énergie thermique résultait du refroidissement d'un flux initialement chaud de la Terre et a conclu que l'âge de la Terre était environ 65 millions d'années. On retrouve ces phénomènes en étudiant le refroidissement de la lithosphère océanique ou l'évolution d'une coulée de magma.

1- Comment explique-t-on de nos jours le résultat erroné obtenu par Lord Kelvin ?

On étudie un milieu matériel semi-infini défini par $y > 0$ dont la surface subit un changement instantané de température. Initialement à $t = 0$, le demi-espace est à la température uniforme T_1 ; pour $t > 0$, la surface $y = 0$ est maintenue à une température constante T_0 . Si $T_1 > T_0$, le milieu matériel se refroidit et sa température diminue. La situation est représentée à la figure 5 pour le cas $T_1 > T_0$.

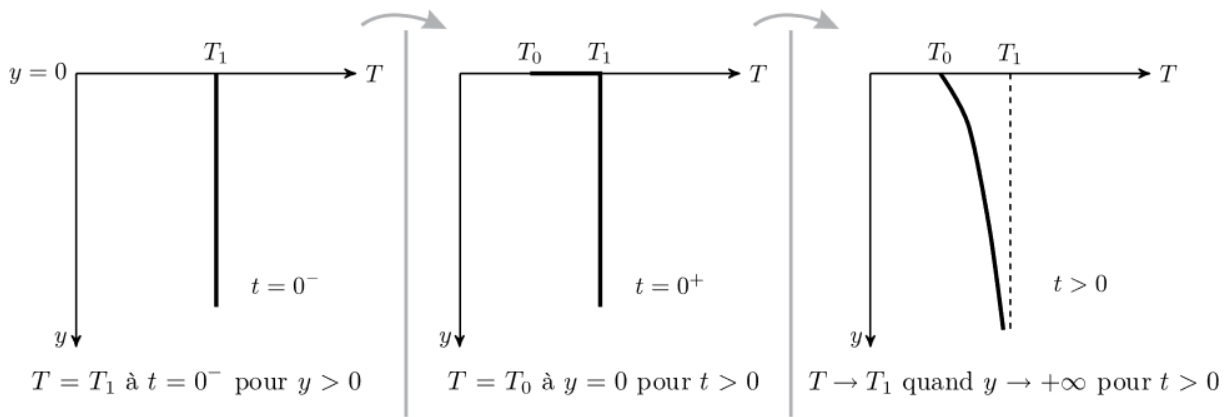


FIGURE 5 – Évolution de la température

Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $\delta \Phi_Q$.

2- Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?

Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application.

En déduire la dimension de la conductivité thermique κ .

On étudie une tranche mésoscopique de sol de masse m de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c comprise entre y et $y + dy$ de surface S .

3- Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial y}$, S , dy et dt puis en fonction de ρ , c , S , $\frac{\partial T}{\partial t}$, dy et dt .

En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ dans laquelle on précisera

l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

En déduire l'expression d'une longueur caractéristique L en fonction de D et du temps t .

On introduit la température adimensionnée : $\theta(y, t) = \frac{T(y, t) - T_1}{T_0 - T_1}$.

4- Quelle est l'équation vérifiée par $\theta(y, t)$?

Déterminer les valeurs de $\theta(y > 0, t = 0)$, $\theta(y = 0, t > 0)$ et $\theta(y \rightarrow \infty, t > 0)$.

On introduit une variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$ et on suppose que θ n'est une fonction que de cette variable η .

5- Montrer que $\frac{d^2 \theta(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0$

6- En utilisant la fonction $\phi(\eta) = \frac{d\theta(\eta)}{d\eta}$, montrer que $\theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$.

On donne $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire une expression de $T(y, t)$ faisant apparaître une intégrale.

La fonction $\chi \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\chi e^{-z^2} dz$ est appelée fonction d'erreur de Gauss, elle est implémentée dans scipy. Elle est souvent notée $\text{erf}(\chi)$. On peut l'appeler directement en utilisant la commande : `from scipy.special import erf`.

B- Formation d'une croûte de lave solide.

Dans cette dernière partie on s'intéresse à une coulée de lave en fusion et à la formation d'une croûte solide à sa surface. On étudie alors l'augmentation de l'épaisseur de cette croûte en fonction du temps.

À la surface extérieure, en $y = 0$, la lave est en contact avec l'air à la température constante T_0 . La lave en fusion à la température T_f est donc soudainement portée à la température T_0 à $t = 0$. Dans ces conditions, la couche superficielle de la lave se solidifie, et on note $y_s(t)$ l'épaisseur de la couche de lave solide.

Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace $0 \leq y \leq y_s(t)$ avec comme conditions aux limites $T = T_0$ en $y = 0$, et $T = T_f$ en $y = y_s(t)$, et comme condition initiale $y_s = 0$ à $t = 0$.

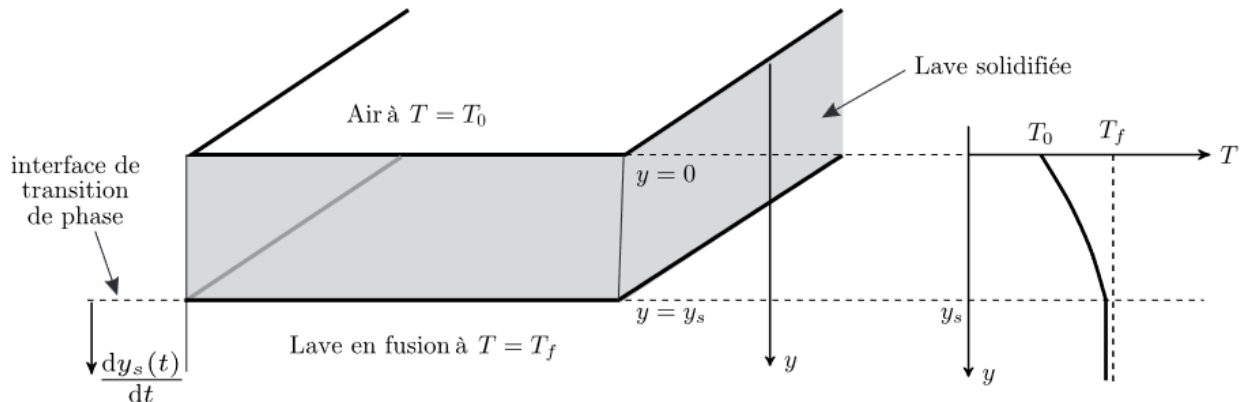


FIGURE 6 – Formation d'une croûte de lave solide

La position $y_s(t)$ de l'interface de transition de phase est une fonction a priori inconnue du temps. Comme dans la situation précédente il n'y a pas d'échelle de longueur définie dans ce problème. Pour cette raison, on travaillera également avec la variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$.

On utilisera également la température adimensionnée $\theta(y, t) = \frac{T(y, t) - T_0}{T_f - T_0}$.

La profondeur de l'interface de solidification $y_s(t)$ doit enfin s'adapter à la longueur caractéristique de la diffusion thermique. Nous supposons que celle-ci varie proportionnellement à la racine carrée du temps, de telle sorte que : $\eta_s = \frac{y_s(t)}{2\sqrt{Dt}} = \text{cte} = \lambda$. Cette constante est inconnue et reste à déterminer.

7- En reprenant l'équation de la question 5, montrer que $\theta(\eta) = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\lambda)}$.

Afin d'obtenir l'expression puis la valeur de la constante λ , nous allons étudier la solidification d'une tranche de lave d'épaisseur dy_s entre les instants t et $t + dt$.

8- Quelle est l'énergie δQ libérée par la solidification à la température T_f d'une tranche dy_s de lave de surface S en fonction de la masse volumique ρ de la lave en fusion et l'enthalpie de fusion massique : $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}$

9- Toute l'énergie libérée par la solidification doit être évacuée par diffusion dans la lave solide car la lave en fusion reste à la température T_f . Montrer que : $\rho \Delta h_{sol \rightarrow liq}(T_f) \frac{dy_s(t)}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_s}$.

10- En déduire que $\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{sol \rightarrow liq}(T_f)$.

11- Quel algorithme peut on utiliser pour obtenir la constante λ numériquement ? Expliquer en quelques mots son fonctionnement.

On donne les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta h_{sol \rightarrow liq}(T_f) &= 400 \text{ kJ.kg}^{-1} & \rho &= 2600 \text{ kg.m}^{-3} \\ c &= 1 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} & D &= 7.10^{-7} \text{ SI} \\ T_f - T_0 &= 1000 \text{ K} \end{aligned}$$

12- À l'aide de la figure 7, estimer la valeur numérique de λ .
En déduire l'épaisseur de la croûte de lave six mois après l'éruption.
Comparer votre résultat à ceux de la figure 8 tirés d'une expérience¹.

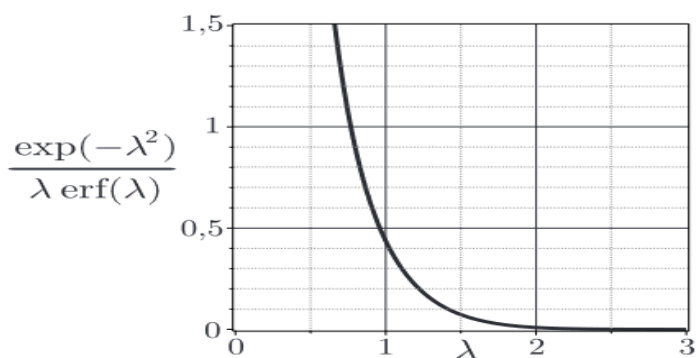


FIGURE 7 – Graphe de $\lambda \mapsto \frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$

