

Nous n'y allons - Physique I :

la fonction d'énergie de Gauss : $\phi(x)$

1 - Introduction au problème de Stefan :

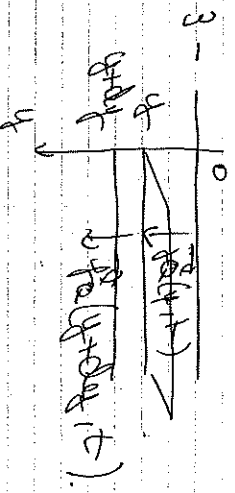
- 1 - On ne peut pas considérer que la diffusion se fait par conduction en comptant sur l'énergie de Gauss venant de la production de chaleur causée par la désintégration des noyaux radioactifs du matériau considéré ($4\pi N$).
- 2 - On est obligé d'écrire l'équation de la diffusion dans l'espace de la surface normale N produisant $\vec{J}$ d'énergie : $\vec{J} \cdot d\vec{S} = \vec{J} \cdot d\vec{S} \cos \theta$

$$[N \cdot \vec{J} \cdot d\vec{S}] = W \cdot m^{-2}$$

$$[N \cdot \vec{J} \cdot d\vec{S}] = H \cdot L \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} = H \cdot T^{-1}$$

à la fois de l'énergie : $\vec{J} \cdot d\vec{S} = -k \cdot \nabla T$
 la loi de Fourier : les gradients de température sont les gradients de l'énergie de l'équilibre thermodynamique

$$[k] = H \cdot T^{-1} \cdot L \cdot \Theta^{-1} \quad (\text{unité : } W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$$



Pendant dt , la tranche reçoit une énergie $\delta Q = (j_x(y) \delta y - j_x(y+dy) \delta y) dt$

$$\delta Q = - \frac{\partial j_x}{\partial y} \delta y \delta x$$

à l'échelle microscopique, il y a des échanges de matière pour pouvoir définir les grandeurs d'énergie et l'énergie du système mais le volume est suffisamment petit pour considérer les grandeurs locales uniformes.

$$dU = \delta Q = - \frac{\partial j_x}{\partial y} \delta y \delta x \quad \text{car } \delta W = 0$$

$$\text{De Gauss } dU = \rho c \delta y \frac{\partial T}{\partial t} \delta x$$

D'ici en égalant les 2 expressions, on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial y}$$

$$\text{Or } j_x = - \chi \nabla T \Rightarrow - \chi \frac{\partial T}{\partial y} = - \chi \frac{\partial T}{\partial y} \Rightarrow \chi = \chi$$

$$\text{D'où } \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \text{ avec } \chi = \frac{\chi}{\rho c}$$

$$[\chi] = L^2 \cdot T^{-1}$$

Le χ est la diffusivité thermique et χ la constante de diffusion

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T^*}{L^2} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^*}{L}$$

En remplaçant dans l'équation de diffusion, on obtient :

$$\frac{1}{L} = \frac{T^*}{L^2} \Rightarrow \boxed{L = \sqrt{D\tau}}$$

$$\theta(y,t) = \frac{T(y,t) - T_1}{T_0 - T_1}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{L^2 - T_1} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{L^2 - T_1} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}}$$

$$\theta = 0 \quad T(y > 0, t = 0) = T_1 \Rightarrow \theta(y > 0, 0) = 0$$

$$T(y = 0, t > 0) = T_0 \Rightarrow \theta(y = 0, t > 0) = 1$$

$$T(y \rightarrow \infty, t > 0) = T_1 \Rightarrow \theta(y \rightarrow \infty, t > 0) = 0$$

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{D\tau}} = \frac{1}{L} \quad \theta(t) = 1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \times \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{L} \times D \quad \theta(t) = \frac{1}{L}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \times \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{L} \times \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{L} \times \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{L} \times \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{L} \times \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{L} \times \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

(3)

On a d'après l'équation vérifiée par θ , on obtient :

$$-\frac{1}{L} D \theta(t) = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{L} D \theta(t) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{L} D \theta(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{L} D \theta(t) = 0}$$

$$k - \psi(\eta) = \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$\psi(\eta) \text{ vérifie } \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{1}{2\eta} \psi(\eta) = 0$$

$$\frac{d\psi}{d\eta} = -\frac{1}{2\eta} \psi(\eta)$$

$$\ln|\psi(\eta)| = -\frac{1}{2} \ln \eta + K$$

$$\Rightarrow \psi(\eta) = A \exp(-\frac{1}{2} \ln \eta) = \frac{A}{\sqrt{\eta}}$$

$$\theta(\eta) = A \int_0^\eta \exp(-\frac{1}{2} \ln z) dz + K$$

$$\theta(y = 0, t > 0) = 1 \Rightarrow \theta(y = 0) = 1$$

$$\Rightarrow K = 1$$

$$\theta(y \rightarrow \infty, t > 0) = 0$$

$$\Rightarrow A \int_0^\infty \exp(-\frac{1}{2} \ln z) dz = \frac{A}{\sqrt{\pi}} + 1 = 0$$

$$A = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\boxed{\theta(\eta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\frac{1}{2} \ln z) dz}$$

(4)

(5)

$$\Theta(y, t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{2}} \exp(-z^2) dz$$

$$\text{Donc } T(y, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \Theta(y, t)$$

$$T(y, t) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{2}} \exp(-z^2) dz$$

8 - Formulation d'une équation de la chaleur:

2-8) vérifie l'éq de la question 1-
Donc d'après la question 6.

$$\Theta(y) = A \int_0^1 \exp(-xz) dz + K$$

$$\Theta(y=0, t > 0) = 0 \text{ car } T(y=0, t) = T_0$$

$$\Theta(y=1) = \frac{T_1 - T_0}{T_0 - T_0} = 1$$

$$\Rightarrow K = 0$$

$$\Theta(1) = A \int_0^1 \exp(-xz) dz = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\int_0^1 \exp(-xz) dz}$$

$$\Theta(y) = \frac{\int_0^1 \exp(-xz) dz}{\int_0^1 \exp(-xz) dz} = \frac{\Theta(y)}{\Theta(y)}$$

$$8 - \Theta(y) = + \int_0^1 \exp(-xz) dz$$

9 - L'équation = évalue en fonction des données de la barre (sans T_0)

(6)

$$\frac{\partial \Theta(y, t)}{\partial t} = -K \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \exp(-xz) dz = K \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=1}$$

$$\text{Donc } \int_0^1 \exp(-xz) dz = K \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$10 - \int_0^1 \exp(-xz) dz = K (T_1 - T_0) \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=1}$$

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi} \sqrt{t}} \exp(-xz)$$

$$\Theta(y=1) = 1 \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 1 \sqrt{\pi} \sqrt{t}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} = 1 \sqrt{\pi} \sqrt{t}$$

Donc:

$$\int_0^1 \exp(-xz) dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{K (T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi} \sqrt{t}} \exp(-xz)$$

$$\frac{\exp(-xz)}{\exp(-xz)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-xz) - \int_0^1 \exp(-xz) dz$$

$$\frac{\exp(-xz)}{\exp(-xz)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-xz) - \int_0^1 \exp(-xz) dz$$

11. la fonction $X = \frac{\sqrt{\pi}}{C(T_0 - T_0)}$ est une

fonction numérique.

Il faut trouver la valeur de T_0 la fonction $\frac{\exp(-X)}{1 + \exp(X)}$ atteint la valeur X .

On peut utiliser un algorithme de dichotomie.

On peut de 1 valeur de départ 1 et de 10

$$① F(1) > X \text{ et } F(2) < X$$

$$② \text{ On calcule } F\left(\frac{1+2}{2}\right)$$

Si $F\left(\frac{1+2}{2}\right) < X$ la solution est entre 1 et $\frac{1+2}{2}$, on remplace 2 par $\frac{1+2}{2}$

Si $F\left(\frac{1+2}{2}\right) > X$, la solution est entre

$\frac{1+2}{2}$ et 2 , on remplace 1 par $\frac{1+2}{2}$

③ On renouvelle l'opération jusqu'à ce que l'intervalle $2-1$ soit inférieur à la précision souhaitée.

$$u - X = \frac{\sqrt{\pi}}{1000 \times 1000} \times 100 \cdot 10^3 = 0.71$$

Dans la fig 7 on obtient $d \approx 0.8$

$$\text{Donc } J = 6 \times 30 \times 24 \times 3600$$

$$u_8 = 24 \sqrt{at}$$

$$u_8 = 2 \times 10 \sqrt{7 \cdot 10^{-7} \times 3600 \times 24}$$

$$u_8 \approx 5.9 \text{ m}$$

On trouve un résultat cohérent avec la figure 8 surtout pour l'absorption.