

Pendule de FoucaultI Mouvement du pendule sans effet de la force d'inertie de Coriolis:

- 1 - La force de gravitation exercée par la terre sur le point M de masse m s'écrit:

$$\vec{F}_g = - \frac{GM_T m}{R_T^2} \vec{e}_z$$

La force d'inertie d'entraînement pour $\alpha = 0$ vaut $\vec{F}_{ie} = m R_T \vec{\Omega} \otimes \vec{\Omega}$ car $\vec{\Omega}$ est la projection orthogonale

$$\vec{F}_{ie} = m R_T (\cos \alpha \vec{e}_z - \cos \alpha \sin \alpha \vec{e}_y)$$

$$\frac{R_T \Omega^2}{GM_T} \approx 3 \cdot 10^{-3} \ll 1 \Rightarrow \|\vec{F}_{ie}\| \ll \|\vec{F}_g\|$$

De plus l'angle formé $\vec{e}_z$ et $\vec{F}_g + \vec{F}_{ie}$ t.q
 $\tan \alpha \approx \frac{R_T \Omega^2}{GM_T} \cos \alpha \sin \alpha \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ angle très faible.

On peut donc considérer que le poids est parallèle à l'axe (Oz) et négliger la force d'inertie d'entraînement devant $\vec{F}_g$.

- 2 - Dans le référentiel terrestre le point M est soumis:

→ à la tension $\vec{T} = -T \vec{e}_r$ du fil

→ au poids $+ mg \vec{e}_z = -mg \vec{e}_z$ avec $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$

→ $\vec{F}_{ie}$ négligée

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T} + m \vec{g}$$

$$\vec{r}(t) = l \vec{e}_r$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -l \dot{\alpha}^2 \vec{e}_r + l \ddot{\alpha} \vec{e}_\alpha$$

$$m(-l \dot{\alpha}^2 \vec{e}_r + l \ddot{\alpha} \vec{e}_\alpha) = m \vec{g} + \vec{T}$$

$$\vec{e}_r: -m l \dot{\alpha}^2 = -T + m g \cos \alpha$$

$$\vec{e}_\alpha: m l \ddot{\alpha} = -m g \sin \alpha$$

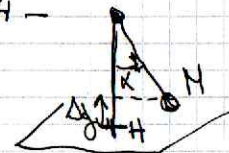
- 3 - Le pendule simple peut être approximé par un oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation des petits angles $\alpha \ll 1 \Rightarrow \sin \alpha \approx \alpha$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}} \quad \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

$$\text{AN} \quad T_0 = 16 \text{ s}$$

4 -



Pour un angle α , la variation d'altitude de M par rapport à la position $\alpha = 0$ vaut

$$\Delta z = l(1 - \cos \alpha)$$

Pour α petit, $\Delta z \approx l(1 + o(\alpha))$

La variation de position horizontale vaut

$$\Delta x = l \sin \alpha = l(\alpha + o(\alpha))$$

Au 1^{er} ordre en α , on peut considérer que le mouvement reste horizontal.

(3)

II Effet de la force d'inertie de Coriolis:

5 - Ω correspond à la vitesse de rotation propre de la terre.

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_0 = 0,39 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\Omega \ll \omega_0$$

$$6 - \vec{e}_x = + \sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z$$

La force d'inertie de Coriolis a pour expression

$$\vec{F}_{ic} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{F}_{ic} = -2m\Omega (\cos \theta \vec{e}_y + \sin \theta \vec{e}_z) \wedge (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y)$$

$$\vec{F}_{ic} = -2m\Omega (-\cos \theta \dot{x} \vec{e}_z + \sin \theta \dot{x} \vec{e}_y - \sin \theta \dot{y} \vec{e}_x)$$

$$\vec{F}_{ic} \approx 2m\Omega \sin \theta \dot{y} \vec{e}_x - 2m\Omega \sin \theta \dot{x} \vec{e}_y$$

En négligeant les composantes selon $\vec{e}_z$.

$$\text{Donc } m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{ic}$$

$$\text{Selon } \vec{e}_x: m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + 2m\Omega \sin \theta \dot{y}$$

$$\text{Selon } \vec{e}_y: m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y - 2m\Omega \sin \theta \dot{x}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega \sin \theta \dot{y} & (1) \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega \sin \theta \dot{x} & (2) \end{cases}$$

$$\text{avec } \Omega = \Omega \sin \theta$$

(4)

$$z - \underline{u} = x + iy$$

$$(1) + i(2) \Rightarrow \ddot{\underline{u}} + \omega_0^2 \underline{u} = 2\Omega \sin \theta (\dot{y} - i\dot{x}) = 2i\Omega \sin \theta (\dot{x} + i\dot{y})$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{u}} + 2i\Omega \sin \theta \dot{\underline{u}} + \omega_0^2 \underline{u} = 0$$

$$\Delta = -4\Omega^2 \sin^2 \theta - 4\omega_0^2 = -4(\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2)$$

$$\underline{u} = -i\Omega \sin \theta \pm i\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{A} e^{-i(\Omega \sin \theta + \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2})t} + \underline{B} e^{-i(\Omega \sin \theta - \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2})t}$$

$$\underline{u}(0) = 0 \quad \underline{u}(0) = x_0 = \underline{A} + \underline{B}$$

$$\dot{\underline{u}}(0) = -i(\Omega \sin \theta + \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2})\underline{A} - i(\Omega \sin \theta - \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2})\underline{B} = 0$$

$$\underline{B} = x_0 - \underline{A}$$

$$\Rightarrow \underline{A}(\Omega \sin \theta + \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2} - \Omega \sin \theta + \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2}) + x_0(\Omega \sin \theta - \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2}) = 0$$

$$\underline{A} = \frac{(\Omega \sin \theta + \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2})}{2\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2}} x_0$$

$$\underline{B} = x_0 \left(1 - \frac{\Omega \sin \theta + \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2}}{2\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2}} \right) = x_0 \frac{\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2} - \Omega \sin \theta}{2\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2}}$$

$$8 - \Omega \ll \omega_0 \quad \underline{A} \approx \underline{B} \approx \frac{x_0}{2}$$

$$\Omega \sin \theta + \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2} = \Omega \sin \theta + \omega_0 \left(1 + \frac{\Omega^2 \sin^2 \theta}{\omega_0^2} \right)^{1/2} \approx \Omega \sin \theta + \omega_0$$

$$\Omega \sin \theta - \sqrt{\Omega^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2} \approx \Omega \sin \theta - \omega_0$$

$$\underline{u}(t) \approx \frac{x_0}{2} e^{-i\Omega \sin \theta t} (e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t})$$

$$\underline{u}(t) \approx x_0 e^{-i\Omega \sin \theta t} \cos(\omega_0 t)$$

(5)

La position de M est donnée par le vecteur

$$\vec{HM} = x_0 \cos(\omega_0 t) [\cos(\beta t) \vec{e}_x - \sin(\beta t) \vec{e}_y]$$

Soit $\vec{v}(t) = \cos(\beta t) \vec{e}_x - \sin(\beta t) \vec{e}_y$ le vecteur unitaire tournant à la vitesse angulaire β dans le sens indirect par rapport à $\vec{e}_z$.

$$\vec{HM} = x_0 \cos(\omega_0 t) \vec{v}(t)$$

On obtient un mouvement d'oscillation dans le plan $(H, \vec{e}_z, \vec{v}(t))$ à la pulsation ω_0 .
Le plan d'oscillation tourne à la vitesse β dans le sens de $-\vec{e}_z$.

$$\Rightarrow \beta T = \psi = -2\pi \text{ rad} = -4,74 \text{ rad.}$$

$$\psi = -271^\circ$$

(on a rotation de -45°)

Pour que le pendule revienne à sa position au bout de $14h$, il faut que $\psi = 0 [2\pi]$
 $\Rightarrow d = 0 \Rightarrow$ point à l'équateur.

11 - Plus la longueur est grande plus β est grande, plus ω_0 petite, plus la vitesse est faible et donc plus faibles seront les frottements fluides.

De même plus la masse est grande et plus les frottements seront faibles par rapport au poids (pour une géométrie donnée de la masse).

(6)

Avoir une grande longueur et une grande masse permet de limiter l'impact des frottements fluides, ce qui permet au pendule d'osciller suffisamment longtemps afin que l'on puisse voir la rotation du plan d'oscillation.

12 - Les dimensions du pendule étant faibles, les oscillations du pendule s'amortissent trop rapidement pour qu'on puisse percevoir la rotation du plan de polarisation.
 $\Rightarrow$ pas d'orientation possible.