

(1)

Physique II - PP. vol.

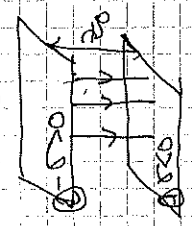
Des charges volantes

En modélisant l'air comme une sphère d'eau de diamètre d, on a :

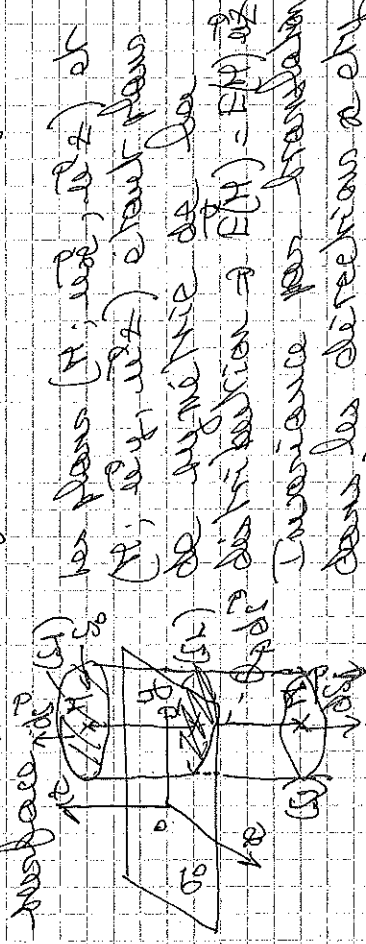
$$m_g = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \rho$$

Dans le variant entre d et 4 mm, on a donc m_g variant entre 4,2 pg et 0,18 mg

On modélise l'atmosphère terrestre par un condensateur plan idéal



Déterminons le champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface σ₀



σ₀ = sym(ρ₀)

(ρ₀) étant plan de symétrie de la distribution ⇒ E(H) = sym de E(Z)/σ₀

On applique le th. des charges volantes dont les bases sont infinies (ρ₀)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \rho \, dV = \int \rho \, dS \cdot dz = \int \rho \, dS \cdot h = \rho \cdot S \cdot h$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \rho \, dV = \int \rho \, dS \cdot dz = \int \rho \, dS \cdot h = \rho \cdot S \cdot h$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \rho \, dV = \int \rho \, dS \cdot dz = \int \rho \, dS \cdot h = \rho \cdot S \cdot h$$

$$E(H) > 0 \quad E(H) = \frac{\rho \cdot h}{\epsilon_0}$$

$$E(H) < 0 \quad E(H) = -\frac{\rho \cdot h}{\epsilon_0}$$

→ Champ entre les armatures du condensateur :

→ application du th. de superposition, on obtient :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{u}_z + \left(+ \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{u}_z = -\epsilon_0 \vec{u}_z \quad \text{Champs uniforme}$$

$$C = -\frac{Q}{V}$$

$$C = -\frac{1,1 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{1 \text{ m}} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

→ Calculons la différence de potentiel V₁ - V₂ entre les deux faces

$$V_1 - V_2 = E \cdot d = 700 \text{ V} = U_{\text{mesurée}}$$

U_{mesurée} = 20 V // Mesure non valide

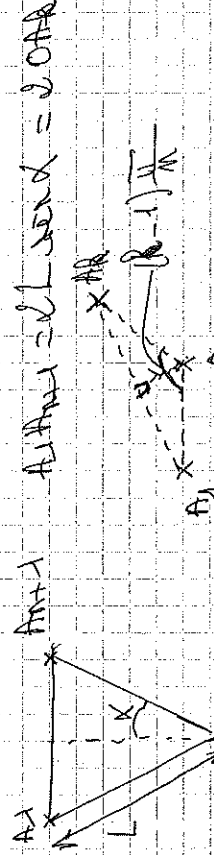
(3) Les charges étant régulièrement réparties, on peut calculer par ex le potentiel crée par les $N-1$ autres charges sur la charge i .

$$V = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 A_1 A_k} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{A_1 A_k}$$

Le plan passant par A_1 et A_k est plan de symétrie.

$$\frac{1}{A_1 A_k} = \frac{1}{b \cdot \sin \theta} = \frac{1}{b \cdot \sin \theta}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{A_1 A_1} + \sum_{k=2}^N \frac{1}{A_1 A_k} \right]$$



$$A_1 A_2 = b \sin \theta = b \sin \theta$$

$$A_1 = \frac{b \sin \theta}{\sin \theta} = b \sin \theta$$

$$A_1 A_k = b \sin \theta \times \sin \theta = b \sin^2 \theta$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b \sin^2 \theta} + \sum_{k=2}^N \frac{1}{b \sin^2 \theta} \right]$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[1 + \sum_{k=2}^N \frac{1}{\sin^2 \theta} \right]$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[1 + \sum_{k=2}^N \frac{1}{\sin^2 \theta} \right]$$

Pour la charge q_1 , l'énergie d'interaction vaut: $E_A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$

$$E_p = \frac{q^2 N}{8\pi\epsilon_0 L \sin \theta} G(N)$$

L'équilibre correspond à un minimum d'énergie potentiel qui correspond à un max soit $\theta = \frac{\pi}{2}$

4- l'énergie cinétique de chaque fil est assimilée à un point de masse m de centre $\vec{r} = \frac{1}{2} \vec{r}$

L'énergie cinétique des systèmes vaut donc $E_c = \frac{1}{2} m \times \frac{1}{2} m \frac{v^2}{4}$
 $E_c = \frac{1}{4} m m \frac{v^2}{4}$

Le syst étant conservatif $E_m = E_c + E_p = \text{cste}$

$$\frac{1}{4} m m \frac{v^2}{4} + \frac{m^2}{8\pi\epsilon_0 L \sin \theta} G(N) = \text{cste}$$

En dérivant par rapport au temps, on a: $\frac{1}{4} m m \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{4} \right) - \frac{m^2}{8\pi\epsilon_0 L \sin \theta} \frac{d}{dt} G(N) = 0$

$$\text{D'où } v(t) \text{ vérifie l'équation différentielle } v'' - \frac{q^2 \cos(\theta) G(N)}{4\pi\epsilon_0 m L^2 \sin^3(\theta)} = 0$$

Position d'éq des $\theta = \frac{\pi}{2}$
 Etude autour de la position d'éq. on pose $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$\text{On vérifie l'éq } \theta'' + \frac{q^2 \cos(\theta) G(N)}{4\pi\epsilon_0 m L^2 \sin^3(\theta)} = 0$$

Pour θ petit $\cos(\theta) \approx 1$ $\sin(\theta) \approx \theta$ ⑤

$$\left[\ddot{\theta} + \frac{q^2 G(N)}{4\pi \epsilon_0 m L^3} \theta(t) = 0 \right]$$

On obtient des oscillations harmoniques autour de la position d'équilibre (la position d'eq est donc stable)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi \epsilon_0 m L^3}{q^2 G(N)}}$$

$$T = \frac{4\pi L}{q} \sqrt{\frac{\epsilon_0 m L}{G(N)}}$$

Rem: $\frac{d^2 EP}{dx^2} = -\frac{Nq^2 \cos(x)}{8\pi \epsilon_0 L \cos(x)} G(N)$

$$\frac{d^2 EP}{dx^2} = -\frac{Nq^2 G(N)}{8\pi \epsilon_0 L} \left[\frac{\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x)}{\sin^2(x)} \right]$$

$$\frac{d^2 EP}{dx^2} (x = \frac{\pi}{2}) > 0 \Rightarrow \text{eq stable}$$

5- $ED = E(E_0) + E(\text{interaction})$

$$E_{\text{ext}} = \frac{Nq^2}{8\pi \epsilon_0 L} \sin(x) G(N)$$

$E(E_0)$ énergie d'interaction des N charges dans le champ extérieur.

Déterminons le potentiel dont dérive le champ $E_0 = -E_0 \sin(x) = -q \frac{dV}{dx}$

$V(x) = +E_0 x + b$ en prenant $V = 0$ au point d'origine de l'axe des x .
Les différentes particules ont même coordonnée verticale $x = L \cos(x)$

⑥

$$E(E_0) = Nq E_0 L \cos(x) + \text{cste}$$

$$E_{\text{el}} = Nq E_0 L \cos(x) + \frac{Nq^2}{8\pi \epsilon_0 L} \cos(x) G(N) + \text{cste}$$

A l'eq E_{el} est extrémale d'où $\frac{dE_{\text{el}}}{dx} = 0$.

$$\frac{dE_{\text{el}}}{dx} = -Nq E_0 L \sin(x) - \frac{Nq^2 \cos(x) G(N)}{8\pi \epsilon_0 L} \sin(x) = 0$$

$$\text{D'où } q G(N) \cos(x) = -Nq E_0 L \sin(x) G(N)$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{q G(N)}{Nq E_0 L \sin(x)} \quad \text{pour } x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow q < 0$$

$\cos(0, \frac{\pi}{2}) : \cos(x)$ fonction croissante, $\cos(x)$ décroissante $\Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est donc croissant

plus q ou $G(N)$ augmente, x augmente
 $\Rightarrow$ si L ou E_0 augmente $\Rightarrow x$ diminue

$$x = 30^\circ \text{ pour } n = 3 \quad G(3) = \frac{18}{1197}$$

$$q = -\frac{Nq E_0 L \sin(x)}{G(x) \cos(x)}$$

$$q = -\frac{Nq E_0 L \sin(x)}{18 \times 10^3 \times 18 \times 10^{-2} \times \frac{1}{1197}}$$

$$q = -1,05 \cdot 10^{-9} C$$

6- la résultante des actions mécaniques exercées sur le $n^{\text{ième}}$ filon + énergie

$$F_0 = Nq E_0 + Mg$$

force de frottement

l'énergie reste en l'air si

④

$$- \Delta n q E_0 > m g g$$

$$n > \frac{m g g}{- \Delta n q E_0}$$

$$n > \frac{4.2 \times 10^{-6} \times 9.8}{3 \cdot 10^{-3} \times 10^6} = 1.4 \times 10^{-3}$$

On parle de quelques dizaines de fois ce qui est très inférieur à la valeur calculée ci-dessus $\Rightarrow$ modèle défectueux

• Ex- entre les armatures V vérifie $\Delta V = 0$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

On cherche des solutions sous la forme $V(r, \theta) = f(r) g(\theta)$

En réinjectant l'expression de $V(r, \theta)$ dans l'éq de Laplace, on obtient

$$\frac{1}{r} g(\theta) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = - \frac{1}{r^2} f(r) \frac{d^2 g}{d\theta^2}$$

Soit $r \neq 0$ dans le domaine d'étude :

$$\frac{r}{f(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = - \frac{1}{g(\theta)} \frac{d^2 g}{d\theta^2}$$

Les variables r et θ étant indépendantes on en déduit que les 2 fonctions de part et d'autre de l'égalité sont constantes

$$- \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = \pm k^2 \quad \text{avec } k \text{ réelle}$$

$$g(\theta) \text{ fonction périodique sur } \mathbb{R} \Rightarrow - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = k^2$$

⑤

$$g(\theta) \text{ vérifie : } \frac{d^2 g}{d\theta^2} + k^2 g(\theta) = 0 \quad (2)$$

$f(r)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = k^2 r^2 f(r) \quad (3)$$

$\rightarrow + g(\theta) = k \sin(u \theta)$ est solution de (2) en effet $\frac{d^2 g}{d\theta^2} = -u^2 g(\theta) \quad k^2 = u^2$

$$\text{Soit } f(r) = A r^u$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) &= \frac{d}{dr} (u A r^{u+1}) = u A r^u = \frac{d}{dr} (A r^{u+1}) \\ &= A u r^u = u^2 r^u = u^2 A r^u \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = u^2 f(r)$$

La fonction $r^u \sin(u \theta)$ vérifie l'éq (1)

De plus, les fonctions constantes et nulles vérifient l'éq 1 -
La linéarité de l'éq de Laplace, la fonction $V(r, \theta) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin(u_n \theta)$ vérifie l'éq 1

$V(r, \theta)$ doit vérifier les conditions aux limites

$$V(r, \theta) = V_0 = V$$

$$V(r, \theta) = V_0 = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin(u_n \theta)$$

$$\Rightarrow u_n \theta = n\pi \quad \left[u_n = \frac{n\pi}{a} \right]$$

⑨

$$V(x,0) = V_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x}$$

Donc $\frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow 0$ $\Rightarrow$ peut devenir grand

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 1 < 0 \quad \text{avec } \phi < \pi$$

$\phi > \pi$ car si le conducteur a une forme de "pointe" et la norme de $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ devient très grande au voisinage de la pointe.

Propriétés mécaniques des fils d'acier (exercice CM 10/11)

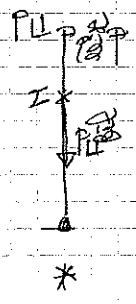
1. $\frac{F_0}{E_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_0}{L_0}$

$\dim(E) = \frac{\dim(F)}{\dim(L_0)} = \frac{N \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}}{L}$

$\dim(E) = N \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$

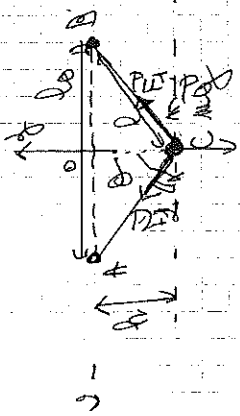
$\Rightarrow$ homogène à une force sur laquelle donc à une pression

Unité de E : Pa



* Pour une force de traction F
 $F = \frac{E S_0 (L - L_0)}{L_0}$ où, le fil exerce
 une force $F_{fil} = -F$
 $F_{fil} = -\frac{E S_0 (L - L_0)}{L_0}$

Le comportement du fil peut être assimilé à celui d'un ressort de raideur $k = \frac{E S_0}{L_0}$



Chaque demi-fil peut être modélisé par un ressort de raideur $k_1 = \frac{E S_0}{L_0}$

Le point C est soumis :

$\rightarrow$ aux poids $m g$

$\rightarrow$ aux forces exercées par les 2 fils F_1 et F_2

$F_1 = k_1 (L - L_0)$ où avec $\Delta L = \frac{L - L_0}{2}$

$F_2 = k_1 (L - L_0)$ où avec $\Delta L = \frac{L - L_0}{2}$

$\rightarrow$ les $m g + F_1 + F_2 = 0$

on suppose un Δz

$\Delta h (L - \frac{L_0}{2}) \sin \theta = m g$

donc $\Delta z = \frac{2 L_0}{L} \Delta h$ pour une masse m faible (ok)

$\Delta h \frac{2 L_0}{L} \left(\sqrt{\frac{L^2}{4} + L_0^2} - \frac{L_0}{2} \right) = m g$

$\Delta h (L_0 \sqrt{\frac{L^2}{4} + L_0^2} - \frac{L_0^2}{2}) \approx \frac{L_0^2}{2} \left(1 + \frac{L^2}{4 L_0^2} \right) \approx \frac{L_0^2}{2} \left(1 + \frac{L^2}{4 L_0^2} \right)$

Donc $\frac{4 L_0^2 \times \frac{L_0}{2}}{L} = m g$

$\Delta h \approx \frac{m g L}{4 L_0} = \frac{m g L_0}{2 E S_0} = \frac{m g L_0}{8 E S_0}$

$\Rightarrow$ on prend le L_0 de la relation précédente

$3 \Delta h (L) = \Delta h \left(\frac{L_0}{2} \right) + \Delta h (m)$

$\Delta h (L) = \frac{1}{3} \Delta h (m) + \frac{1}{3} \Delta h \left(\frac{L_0}{2} \right)$

La courbe $\Delta h(L) = f(L)$ est une droite de pente $\frac{3 L_0}{4 L} \approx 0,33$

La loi est bien vérifiée

L'ordonnée à l'origine vaut : $-0,33 \cdot p$ avec p est m en unité SI, cela correspond à l'ordonnée à l'origine de la courbe

(9)

$$\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = p \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = e^p$$

$$h = \frac{p_2}{p_1} e^{-3p} \Rightarrow h = 7.9$$

$$h = \frac{p_2}{p_1} e^{-3p} \Rightarrow h = 7.9 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$F = \frac{p_2}{p_1} = 5 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\frac{F}{S_0} = \frac{5 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}{5 \text{ HPa}}$$

4- On utilise le modèle Figs-6).

La compression horizontale des fibres exerce

une force $F_g + F_d = h \Delta l_{\text{ave}} + h \Delta l_{\text{ave}}$

$= 2 h \Delta l_{\text{ave}}$

ma $\Delta l_{\text{ave}} = 2 h \Delta l_{\text{ave}}$ PFD appliquée à M.

D'où $\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{M} \Delta l_{\text{max}} \cdot (L)$

Initialement $v = 0$ $F_p = L \times \frac{1}{2} h (\Delta l_{\text{max}})^2$

lorsque $v = v_{\text{max}}$ $\Delta l = 0$ $F_p = 0 = F_{\text{kin}}$

En écrivait la conservation de l'énergie

mécanique: $\frac{1}{2} M v_{\text{max}}^2 = h (\Delta l_{\text{max}})^2$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2 h \Delta l_{\text{max}}^2}{M}}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\Delta l_{\text{max}}} \Rightarrow v_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\Delta l_{\text{max}}} \times \Delta l_{\text{max}}$$

$$\Delta l_{\text{max}} = \frac{v_{\text{max}}^2}{\sigma_{\text{max}}}$$

(10)

$$h = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\text{max}}}{\Delta l_{\text{max}}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\text{max}}}{\Delta l_{\text{max}}}$$

pression instantanée $p(t) = F(t) \cdot p(t)$

$p(t) = \sigma_{\text{max}} \cos(\omega t) \times \Delta l_{\text{max}} \cos(\omega t)$

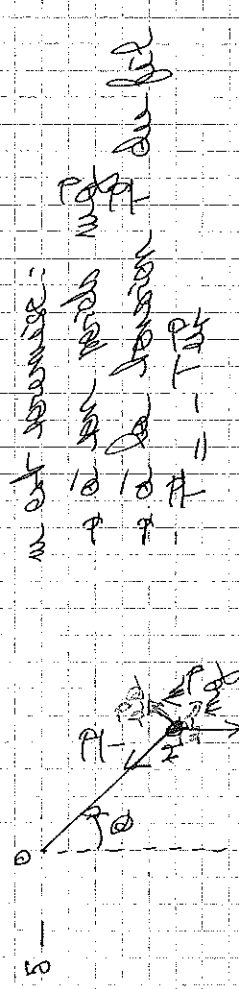
$P_{\text{max}} = \frac{1}{2} \sigma_{\text{max}} \Delta l_{\text{max}}$

$P_{\text{max}} = \text{moyenne } P$

$m_{\text{moyenne}} = \frac{m \cdot \sigma_{\text{max}} \Delta l_{\text{max}}}{2}$

$m_{\text{moyenne}} = 35.8 \text{ mg}$

L'analyse ne peut pas réaliser seule cette opération.



m est soumise:

- à sa propre poids mg
- à la tension T du fil
- $T = -T_{\text{sp}}$

$$p(t) = L \ddot{x}$$

$$\ddot{x}(t) = -L \ddot{x} + L \ddot{x}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique à M:

$$m \ddot{x} = T + mg$$

$$- m L \ddot{x} = -T + mg \cos(\omega t)$$

$$m L \ddot{x} = -mg \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L} \cos(\omega t)$$

On multiplie par $\dot{x}$ et on intègre entre

$t=0$ où $\dot{x}=0$ et $\dot{x}=\dot{x}$ et on obtient

- On a: $\dot{x} \ddot{x} = -\frac{g}{L} \dot{x} \cos(\omega t)$

$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = -\frac{g}{L} \sin(\omega t) \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2g}{L}} \sin(\omega t)$

23. 11. 1930

[illegible]

6 - Pour 2 ~~rects~~ identique verticaux, la force exercée sur 2 vants: $2 \times (-111 - 61) \text{ Pa} = -172 \text{ Pa}$

12
 1
 5
 10
 15
 20
 25
 30
 35
 40
 45
 50
 55
 60
 65
 70
 75
 80
 85
 90
 95
 100

2009
 9
 4
 2
 11
 15
 21
 11
 10
 11
 12
 14
 16

1
11
2

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 4} \\ 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

Be regarding the above and the
 file, on our own diamond hotel

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

0.16 m

On trouve en quantité x 16 fois le diamètre
des fils de spider-man