DM Sciences physiques N°9 (Facultatif)

I- Des araignées volantes

Certaines araignées volantes dont la taille est comprise entre 2 et 7 mm parviennent, en tirant profit des forces électrostatiques, à décoller et à s'envoler. Elles arrivent ainsi à parcourir, au gré des vents, des distances considérables (plusieurs centaines de kilomètres) comme l'a observé pour la première fois, Charles Darwin, lors de son grand voyage à bord du Beagle de 1831 à 1836.
Nous nous intéressons à la physique permettant d'expliquer un tel phénomène.

1- En utilisant une schématisation sphérique rudimentaire pour modéliser ces araignées, estimer un ordre de grandeur m_g pour leur masse .
Par temps clair, le champ électrique, en tout point de la surface de la Terre est radial uniforme, dirigé vers le centre de la Terre et sa valeur moyenne vaut $E_0 = 120\ V \cdot m^{-1}$. En première approximation on assimile localement l'atmosphère terrestre à un condensateur plan dont les deux armatures sont le sol terrestre et la couche de l'ionosphère située à l'altitude $z_0 = 60$ km de celui-ci.
2- Évaluer la valeur de la densité surfacique moyenne de charge au niveau du sol, notée σ . Des mesures ont permis de montrer qu'il existe une différence de 360 kV entre l'ionosphère et le sol. Que pouvez vous conclure quant à la validité du modèle électrique atmosphérique proposé ?

Les araignées volantes positionnent leurs corps de manière à prendre le vent, en éjectant vers le ciel des fils de soie, qui grâce aux courants d'air et au champ électrique leur permettent de s'élever. Darwin nota que ces araignées décollent en présence au niveau du sol de légers courants d'air ascendants ayant des vitesses U de l'ordre de 0,1 $m \cdot s^{-1}$ et que le nombre de fils fabriqués par celles-ci peut atteindre quelques dizaines.
On peut montrer que les forces hydrodynamiques sont insuffisantes pour permettre à elles seules de faire s'élever les araignées.
Darwin remarqua que les différents fils tissés par une même araignée s'écartent en éventail du fait d'une répulsion électrostatique. Pour corroborer cette hypothèse, on modélise chaque fil de soie comme un fil rigide isolant, de longueur L que l'on supposera inextensible dans un premier temps, possédant en son extrémité libre, une charge q. Ces charges placées dans le champ électrique terrestre interagissent entre elles. On suppose qu'il y a 2n fils et que les charges correspondantes se répartissent régulièrement sur le cercle formant la base d'un cône de demi angle α en son sommet S (lequel correspond à l'extrémité commune des soies) avec la verticale (Fig. 2)

3- Montrer que le potentiel électrique créé sur une charge par les 2n-1 autres charges s'exprime comme :

$$V=\frac{q}{p\pi\epsilon_0 L\sin\alpha}G(n) \quad \text{avec} \quad G(n)-1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$$

On précisera la valeur de l'entier p. On pourra éventuellement considérer les points diamétralement opposés A_k et A_{k+n} avec $1 \leq k \leq n$.
L'énergie d'interaction électrostatique du système total constitué des 2n charges en l'absence de champ électrique extérieur correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour amener les charges dans l'état étudie, elle a pour expression $E_p=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} q_i V_i$ où V_i est le potentiel créé au point où se trouve la charge qi par les charges autres que qi . Donner l'expression de E_p en fonction des données et de G(n) .
S'il n'est soumis qu'à ce potentiel, quelle est alors la forme de l'éventail à l'équilibre ?

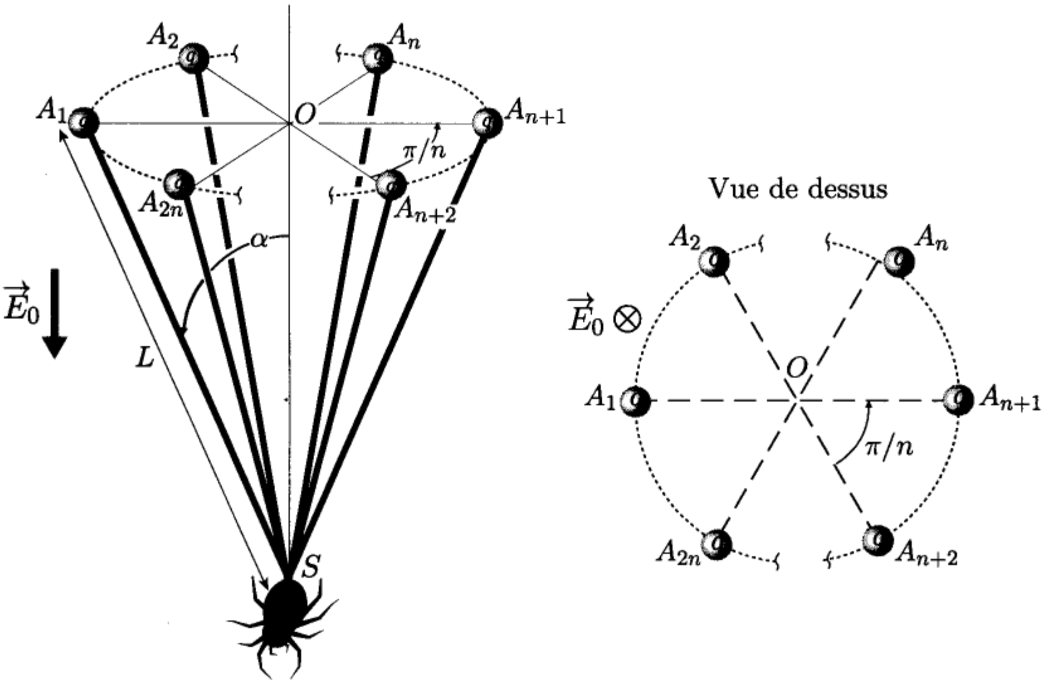

FIGURE 2 – Représentation schématique d'une araignée prête à décoller.

On étudie le mouvement de cet éventail autour de sa position d'équilibre en supposant qu'à l'instant t tous les fils forment le même angle $\alpha(t)$ avec la verticale. On simplifie le système en considérant, d'une part, que la masse m de chaque fil est ponctuelle, située en leur milieu et, d'autre part, on néglige l'énergie potentielle de pesanteur et celle de déformation élastique devant l'électrostatique. On suppose finalement que S est fixe .

4- Déterminer l'équation différentielle régissant ce mouvement. Discuter la stabilité de l'équilibre et établir l'expression de la période T , du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en fonction de ε_0, m, L, q et G(n).
5- Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique du système lorsque celui-ci est maintenant immergé dans le champ électrique terrestre $\vec{E}_0$ existant au niveau du sol ainsi que l'équation permettant de déterminer la valeur de l'angle α à l'équilibre. Expliquer qualitativement comment varie l'ouverture d'équilibre de l'éventail en fonction respectivement de q, n, L et E_0 . On observe un angle $\alpha = 30°$ pour un éventail constitué de 2n = 6 soies longues de 1 mètre. Que vaut alors la charge q ?
On donne $G(3) \simeq 38/(3\sqrt{3})$.
6- Déterminer l'expression de la force électrique s'exerçant sur l'araignée au niveau du sol pour une charge dont le module est de l'ordre du nanocoulomb. Par temps clair et uniquement par la force électrique, combien de fils sont-ils nécessaires pour soulever les plus petites araignées ? Commenter ce résultat.

En réalité, lorsqu'elles décollent, les araignées sont situées sur des zones où le champ électrique est bien plus important que dans les conditions normales du fait d'un phénomène connu sous le nom d'effet de pointe. On retrouve ces conditions au sommet des arbres ou du mât du Beagle comme dans l'expérience de Darwin.
Pour appréhender un tel effet, on considère un conducteur plan infini dans lequel un endroit possède la forme d'un coin obtus ou aigu (Fig 3.) dont le sommet O forme l'origine d'un repère de coordonnées polaires. La région de l'espace pour laquelle $0 < \theta < \varphi$ est l'air assimilé au vide ne contenant aucune charge libre. Les conditions aux limites sont $V(r, 0) = V(r, \varphi) = V_0$.
On note $V(M)$ le potentiel électrique en un point M de l'espace .

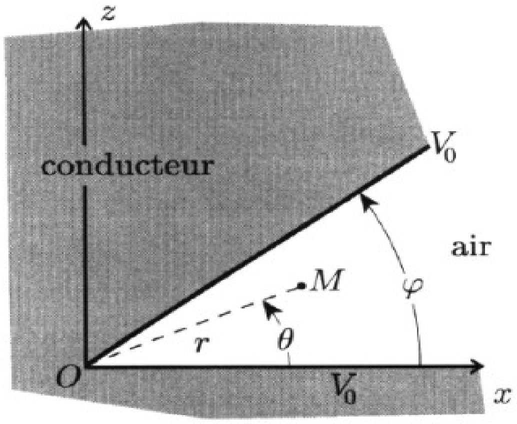

FIGURE 3 – Modèle de coin.

On donne l'expression du Laplacien d'une fonction $F(r,\theta)$ en coordonnées polaires :

$$\Delta F=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

7- Déterminer l'équation différentielle satisfaite par V (r, θ) dans cette région.
On cherche une solution aux variables polaires séparées : V (r, θ) = f (r) × g(θ). Écrire les équations vérifiées par f et g sachant que g est une fonction périodique .
Justifier que $V(r,\theta)=\tilde{V}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\omega_n}\sin(\omega_n\theta)$. Dans cette relation, $\tilde{V}$ et a_n $n\in\mathbb{N}*$ sont des constantes ,on ne cherchera pas à déterminer les a_n .
On précisera par contre l'expression de $\tilde{V}$ et de ω_n en fonction de φ et de l'entier positif n.
8- En ne considérant que le terme n = 1 qui s'avère prépondérant, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$.
En déduire une condition sur φ pour laquelle $\vec{E}(M)$ peut devenir très important si M →O.

II Propriétés mécaniques des fils d'araignée

L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale l_0 de section S_0 soumis à une force de traction d'intensité F est donnée, dans le régime des faibles élongations, par la loi de Hooke :
$\frac{\delta l}{l_0}=\frac{1}{E}\frac{F}{S_0}$ où E est le module de Young du matériau constituant le fil.
9- Quelle est la dimension de E ?
Montrer que, dans ce régime, le comportement mécanique du fil peut être assimilé à celui d'un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction des données du problème.

Pour mesurer le module de Young d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple. Le fil de longueur l_0 est attaché en deux points fixes A et B distants de l_0 et situés sur une même horizontale. Une masse m est suspendue au point C milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V, dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur l .
On mesure alors la hauteur h dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale.
Cette configuration d'équilibre est représentée sur la figure 4 .

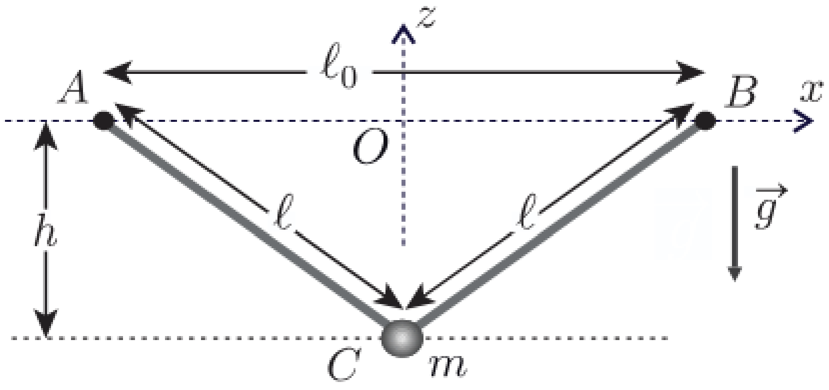

FIGURE 4 – Extension d'un fil.

10- Établir, lorsque la masse m est suffisamment faible, la loi de puissance qui relie h à m et aux autres variables du problème.

La figure 5 ci-contre reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec un fil de longueur $l_0 = 5\,cm$ de rayon a = 5 µm et différentes masses m suspendues.

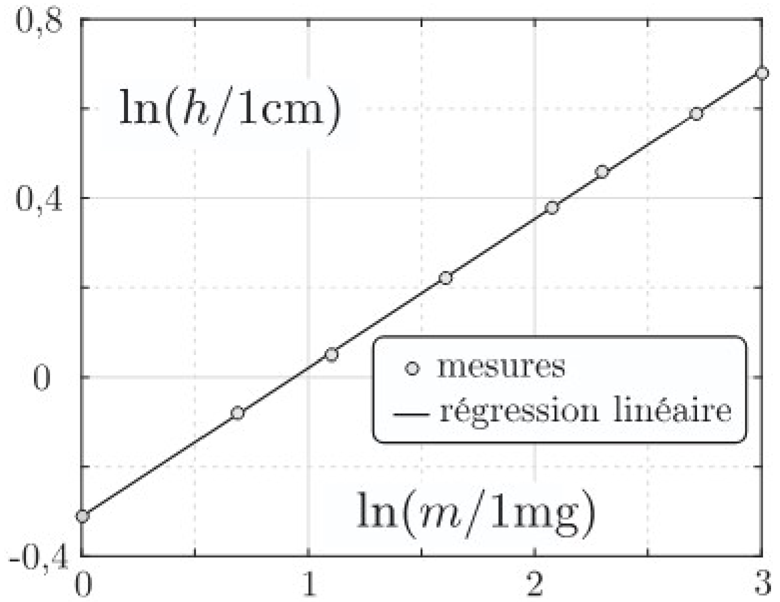

FIGURE 5 – Mesures de $h(m)$.

11- Vérifier que la loi obtenue à la question 10 est compatible avec l'expérience.
Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent au fil ; en déduire une estimation de la valeur numérique du module de Young du fil.

L'araignée *Hyptiote cavatus*, qui possède une masse d'environ 7 mg, utilise ses muscles pour enrouler l'un des fils afin de tendre la toile, comme on utilise son bras pour tendre la corde d'un arc.

Elle garde alors cette position jusqu'à ce qu'une proie entre en contact avec la toile. Quand elle relâche la tension, la toile subit alors une très forte accélération puis s'emmêle autour de l'insecte proie, ce qui marque le début du processus de capture.
La vitesse de l'araignée qui reste accrochée à la toile atteint alors une valeur maximale d'environ $v_{max} = 3\,m.s^{-1}$ en ayant subi une accélération maximale prodigieuse $a_{max} = 800\,m.s^{-2}$.

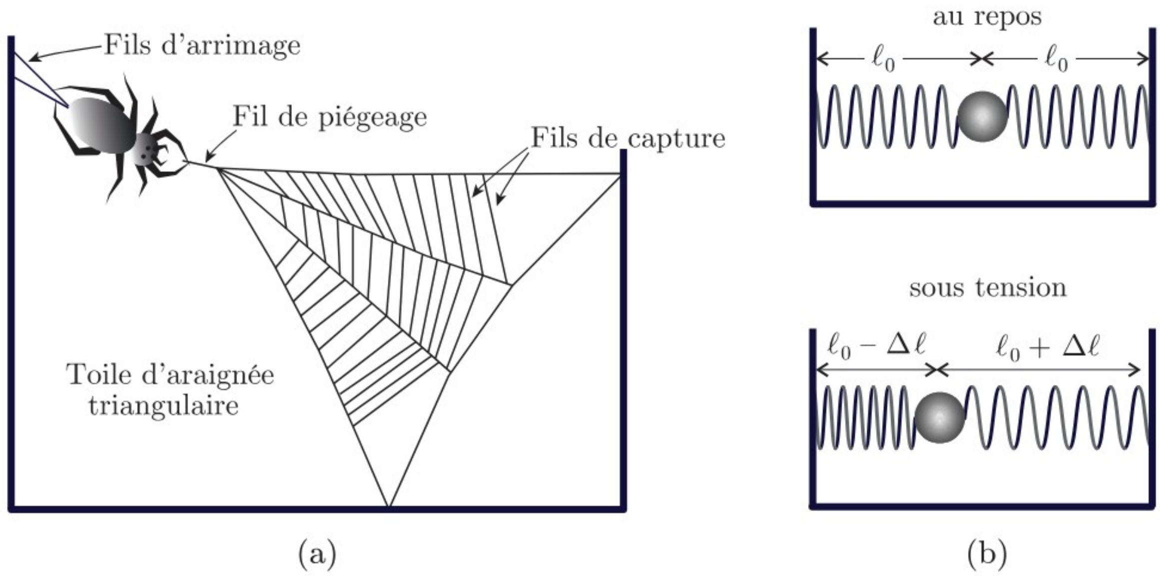

FIGURE 6 – (a) Organisation spatiale schématique de la toile triangulaire servant de piège – (b) Modèle mécanique équivalent au repos et sous tension

12- En modélisant la toile par un simple fil de soie dont on négligera la masse devant celle de l'araignée, estimer, en fonction de v_{max} et a_{max}, l'allongement maximum Δl du fil avant que l'araignée ne relâche la tension (Fig. 6), ainsi que sa raideur k en fonction de m, v_{max} et a_{max}.
Évaluer, en fonction de m, v_{max} et a_{max}, la puissance mécanique instantanée maximale P_{max} développée pendant le processus de capture.
Sachant que la puissance massique musculaire maximale que peuvent fournir les arthropodes est d'environ $P=326\,W.kg^{-1}$ par kilo de muscle, estimer la masse de muscle nécessaire qu'il faudrait à notre araignée pour réaliser ce processus de capture sans aide extérieure. Conclure.

Dans les films, le super-héros Spiderman, dont on estime la masse à m = 75 kg, poursuit les voitures en se balançant sur des fils d'immeuble en immeuble.
Il attache son fil supposé inextensible, de masse négligeable et de longueur $l=25\,m$ sur un point de l'immeuble situé en face, à l'horizontale par rapport à sa position. Dans ces conditions on a donc $\theta(t=0)=\frac{\pi}{2}$.
Il se laisse alors entraîner sans vitesse initiale(Fig. 7).

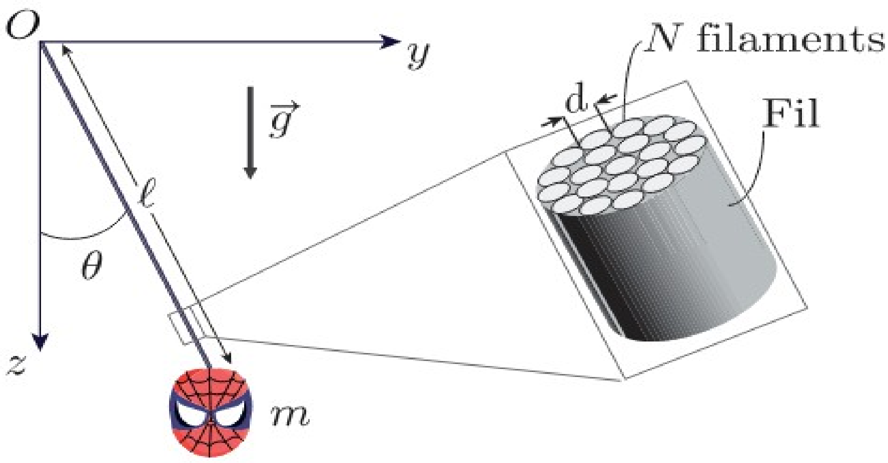

FIGURE 7 – Le vol de SPIDERMAN.

13- Écrire les équations du mouvement de Spiderman. En déduire, en fonction de m et g, l'expression de la tension maximale que doit supporter ce fil si l'on suppose qu'il est inextensible .

On suppose que le fil que tisse Spiderman est constitué en réalité de N filaments de soie identiques assemblés en parallèle .

14- Déterminer la constante de raideur du ressort équivalent à N ressorts identiques de constante de raideur k disposés en parallèle.
Sachant que le module de Young d'un filament de soie et son rayon valent respectivement $E = 10$ MPa et $a = 5$ µm, combien de filaments le fil doit-il comporter au minimum pour que les filaments ne subissent pas une déformation supérieure à 1 % et donc pouvoir supporter Spiderman lors de son vol ?
Est-ce cohérent avec le diamètre des fils, de l'ordre du centimètre, produits par Spiderman dans les films ?