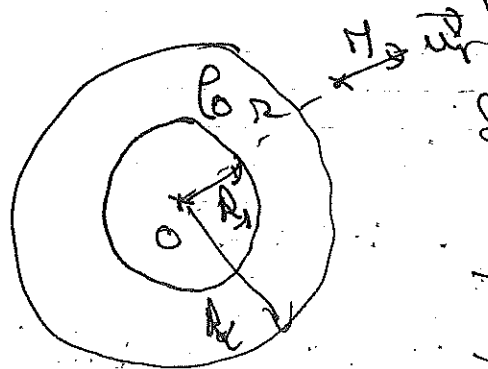


Ex: distributions sphériques

A-



Symétrie sphérique:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \vec{u}_r$$

Th. de Gauss appliqué à une sphère de rayon r .

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$r < R_1 \quad Q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

$$R_1 < r < R_2 \quad Q_{int} = \rho_0 \frac{4\pi}{3} (r^3 - R_1^3)$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \vec{u}_r}$$

$$r > R_2 \quad Q_{int} = \rho_0 \frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} (R_2^3 - R_1^3) \vec{u}_r}$$

Continuité vérifiée en $r = R_1$ et $r = R_2$.

$$\begin{aligned} 2- \quad V_1 - V_2 &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) dr \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\left(\frac{r^2}{2} \right)_{R_1}^{R_2} + R_1^3 \left(\frac{1}{r} \right)_{R_1}^{R_2} \right] \end{aligned}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} + R_1^3 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right]$$

$$R_1 < r < R_2 \quad \vec{E}^D = - \frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

$$\frac{dV}{dr} = - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{3r^2} \right)$$

$$V(r) = - \frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} - \frac{\rho_0 R_1^3}{9\epsilon_0 r} + \text{cte}$$

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) - \frac{\rho_0 R_1^3}{9\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Remarque: calcul à partir de l'équation locale.

$$\text{div } \vec{E}^D = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E(r))}{dr} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

$r < R_1$: $\rho = 0$.

$$r^2 E(r) = K_1$$

$$E(r) = \frac{K_1}{r^2}$$

$r \rightarrow 0$ E ne peut diverger $\Rightarrow K_1 = 0$
 $\vec{E}^D = \vec{0}$

$R_1 < r < R_2$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E(r))}{dr} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}$$

$$\frac{d(r^2 E(r))}{dr} = \frac{\rho_0 r^2}{3\epsilon_0}$$

$$r^2 E(r) = \frac{\rho_0 r^3}{9\epsilon_0} + K_2$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{9\epsilon_0} + \frac{K_2}{r^2}$$

Continuité en $r = R_1$

$$0 = \frac{\rho_0 R_1}{9\epsilon_0} + \frac{K_2}{R_1^2}$$

$$K_2 = - \frac{\rho_0}{9\epsilon_0} R_1^3$$

$$\vec{E}^D = \frac{\rho_0}{9\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \vec{u}_r$$

$$\underline{x > x_c}$$

$$p(x) = 0$$

$$x < E(x) = R_3$$

$$E(x) = \frac{R_3}{x_c}$$

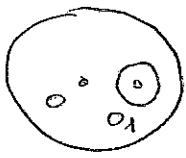
Continuité en $x = x_c$

$$\frac{p_0}{\partial \epsilon_0} \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_2^2} \right) = \frac{R_3}{x_c}$$

$$R_3 = \frac{p_0}{\partial \epsilon_0} (R_1^3 - R_2^3)$$

$$R_3 = \frac{p_0 (R_1^3 - R_2^3)}{\partial \epsilon_0 x_c} \quad \vec{p}$$

Exercice 2: Champ dans une cavité.



On peut considérer ce pb. comme la superposition d'une sphère pleine de centre O et de densité $+\rho$ et d'une sphère pleine de centre O_1 et de densité $-\rho$.

* Chp à l'int. d'une sphère pleine:

R. de Gauss: Chp $\vec{E}^0 = E(r) \vec{e}_r$.

S = sphère de centre O de rayon r .

$$E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4\pi}{3} r^3}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM}}$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{O_1M}$$

$$\vec{E}_r = \vec{E} + \vec{E}_1$$

$$\vec{E}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{OM} + \vec{MO}_1)$$

$$\vec{E}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OO}_1$$

Chp est ds la cavité.

Ex: potentiel de Yukawa.

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} e^{-\frac{r}{a}}$$

1 - $[Q] = C$ $[a] = m$.

2 - $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar} \right] e^{-\frac{r}{a}} \vec{u}_r}$$

3 - Th. Gauss :

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{q(r) = Q \left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}}}$$

$r \rightarrow 0$	$q \rightarrow Q$	} Charge centrale Q + charge el de charge $-Q$
$r \rightarrow \infty$	$q \rightarrow 0$	

4 - Charge contenue entre 2 sphères
rayons r et $r+dr$.

$$dq = q(r+dr) - q(r) = \rho(r) 4\pi r^2 dr.$$

$$= \frac{dq}{dr} dr = \rho(r) 4\pi r^2 dr.$$

$$\left[-\frac{Q}{a} \left(1 + \frac{r}{a} \right) + \frac{Q}{a} \right] e^{-\frac{r}{a}} = -\frac{Qr}{a^2} e^{-\frac{r}{a}} = \rho(r) 4\pi r^2$$

$$\boxed{\rho(r) = -\frac{Q}{4\pi a^2} e^{-\frac{r}{a}}}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} \right)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{Q}{r^2 4\pi\epsilon_0} e^{-\frac{r}{a}} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \right]$$

$$\rho(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} - \frac{r}{a^2} \right) e^{-\frac{r}{a}}$$

$$\rho(r) = - \frac{Q}{4\pi a^2} e^{-\frac{r}{a}}$$

$$dQ = - \frac{Q}{4\pi a^2} e^{-\frac{r}{a}} \times 4\pi r^2 dr$$

$$= - Q \frac{r}{a^2} e^{-\frac{r}{a}} dr$$

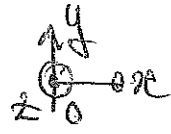
$$Q_{\text{enc}} = - \frac{Q}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{a}} dr$$

$$Q_{\text{enc}} = \left[-ra e^{-\frac{r}{a}} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -a e^{-\frac{r}{a}} dr$$

$$= \frac{a \left(-a e^{-\frac{r}{a}} \right)_0^{\infty}}{a^2}$$

Ex1: lignes de champ.

1- Plans (xOy) et (xOz)
plans de symétrie.

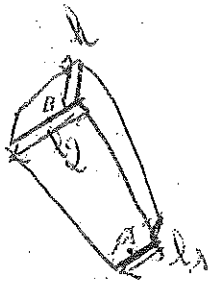


2- On entoure les zones où se trouvent les charges, d'une surface cylindrique.

Fil d: $Q_{int} > 0 \Rightarrow d_1 > 0$

Fil v: $Q_{int} < 0 \Rightarrow d_2 < 0$

"3": $Q_{int} > 0 \Rightarrow d_3 > 0$



2

3

La région où se trouvent A et B est
bide de charge $\Rightarrow$ conservation des flux
flux de $\vec{E}$ à travers le tube de champ (T)

$$\oint E(A) d_1 R = E(B) d_2 R \quad \text{or} \quad d_1 = d_2$$

$$E(B) = \frac{E(A)}{2} = 50 \text{ V.m}^{-1}$$

Ex: électricisation du sol.

a - lignes de champ $\perp$ aux équipotentielles.



lignes de champ $\perp$ aux équipotentielles
selon les potentiels décroissants.

b - th de Gauss sur la surface fermée (S).

The diagram shows a curved line representing an equipotential surface. A small closed loop, labeled (S), is drawn on this curve. Arrows labeled $\vec{E}$ point outwards from the surface, perpendicular to the curve. The text 'th de Gauss sur la surface fermée (S)' is written to the right.

L'aspérité étant équipotentielle $\vec{E} \perp \vec{dS}$
à l'intérieur de l'aspérité.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0 \Rightarrow Q_{int} > 0$$

On peut prendre S aussi petite que l'on veut $\rightarrow$ l'aspérité est chargée positivement.

c) Qd les lignes de champ se resserrent le champ est plus intense.

le champ est plus intense au sommet de l'aspérité car les équipotentielles sont plus proches.

d - On peut approximer le $\nabla \phi$ par $\frac{V_1 - V_2}{\Delta x}$

Entre les équipotentielles 0 et -0,38 V

$$E \approx \frac{0,38 \cdot 10^3}{0,8 \text{ cm}} = 475 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$$

En haut à droite entre les équipotentielles -18 V et -1,58 V $\rightarrow$ 2 carreaux

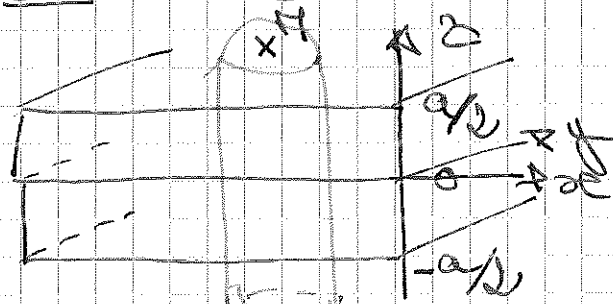
$$E \approx \frac{0,5 \cdot 10^3}{2} = 0,25 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$$

$$E \approx 575 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \begin{matrix} 0,25 \text{ V} \rightarrow 1 \text{ cm} \\ 1 \text{ V} \rightarrow 4 \text{ cm} \end{matrix}$$

$$E \approx \frac{0,6}{0,25} \times 5 = 12 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \begin{matrix} 1 \text{ cm} \rightarrow 0,05 \text{ m} \\ 1 \text{ V} \rightarrow 0,05 \text{ V} \\ \rightarrow 1 \text{ m} \end{matrix}$$

e - On est loin du champ électrique pour s'en approcher il faut une aspérité + pointue.

Ex: Étoile liée à un nuage de gaz.



1- Plan $(M; \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ | Plan de symétrie
 $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ | $\vec{g}(M) = g(M) \vec{e}_z$.

Invariance de la distribution par translation selon y et z

$$\vec{g}(M) = g(x) \vec{e}_z.$$

Si 2 pts M et M' sur le (xOy) plan de symétrie, $\vec{g}(M) = -\vec{g}(M')$

2 - Th. de Gauss appliqué à un cylindre de hauteur $2a$ et section S .

$z > a$. $\oint g(M) S = -4\pi G \rho_0 S a$.

$$\boxed{\vec{g}(M) = -2\pi G \rho_0 a \vec{e}_z}$$

$z < -a$ $\vec{g}(M) = 2\pi G \rho_0 a \vec{e}_z$.

$0 < z < a$ $\oint g(M) S = -4\pi G \rho_0 S z$.

$$\boxed{\vec{g} = -4\pi G \rho_0 z \vec{e}_z}$$

$-\frac{a}{2} < z < 0$ $\vec{g} = -4\pi G \rho_0 z \vec{e}_z$.

Continuité de $\vec{g}$ en $z = \frac{a}{2}$ et $z = -\frac{a}{2}$.