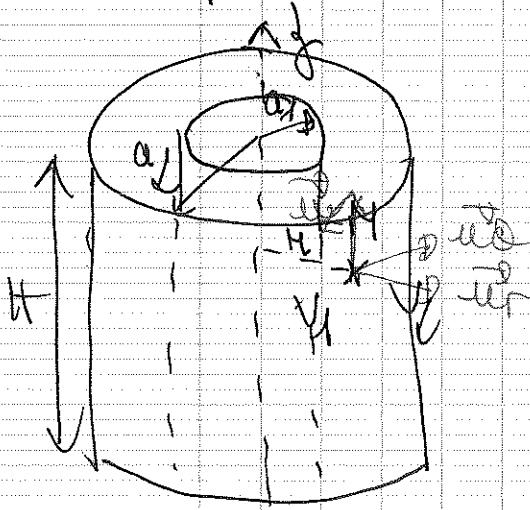


Ex: planimètre capacitif (d'après banque DT-EX4)



Plan $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$
 est un plan de symétrie
 $\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$

Invariance par rotation autour
 de (Oz) et par translation
 selon (Oz)
 $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$

1 - Th de Gauss appliquée à un cylindre de hauteur
 h et de rayon $a_1 < r < a_2$.

$$\oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \int_{\text{cylindre}} E(r) \vec{e}_r \cdot d\vec{S} \vec{e}_r = E(r) 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r h} \vec{e}_r$$

2 - Par définition $Q = C_0 (V_1 - V_2)$

$$C_0 = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$$4 - V_1 - V_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{r} \vec{e}_r = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

$$C_0 = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

(2)

5 - les 2 condensateurs sont en parallèle car il y a un décalé entre les 2 cylindres constituant les armatures du condensateur.

$$Q_{\text{tot}} = Q_{\text{eau}} + Q_{\text{air}}$$

$$Q_{\text{tot}} = C_{\text{eau}}(V_1 - V_2) + C_{\text{air}}(V_1 - V_2) = C(V_1 - V_2)$$

$$\Rightarrow C = C_{\text{eau}} + C_{\text{air}}$$

$$6 - C_{\text{eau}} = \frac{2\pi \epsilon R}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)} \quad C_{\text{air}} = \frac{2\pi \epsilon_0 (H - R)}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 H}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)} + \frac{2\pi (\epsilon - \epsilon_0) R}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

$$C = C_0 \left(1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \frac{R}{H} \right) = C_0 (A R + B)$$

avec $B = 1$ et $A = \frac{1}{H} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right)$

5 - Dans l'espace inter-armature :

$$\rightarrow \Delta V = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

$$r \frac{dV}{dr} = A$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r}$$

$$V(r) = A \ln r + B$$

$$V(r=a_1) = V_1 = A \ln a_1 + B$$

$$V(r=a_2) = V_2 = A \ln a_2 + B$$

$$V_2 - V_1 = A \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

$$\rightarrow \vec{E} = - \frac{dV}{dr} \vec{u}_r = \frac{V_1 - V_2}{\ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right)} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

$\rightarrow$ l'IR de Gauss charge Q de l'anneau

$$E(r) \times \pi R H = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$Q_1 = \epsilon_0 \frac{\pi R H}{\ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right)} (V_1 - V_2)$$