

# Principe Fondamental de la Dynamique

PSI-MP : Lycée Rabelais



## Pré-requis

Cours de première année (et rappels) sur la mécanique

Cours sur le principe fondamental de la dynamique



## Objectifs

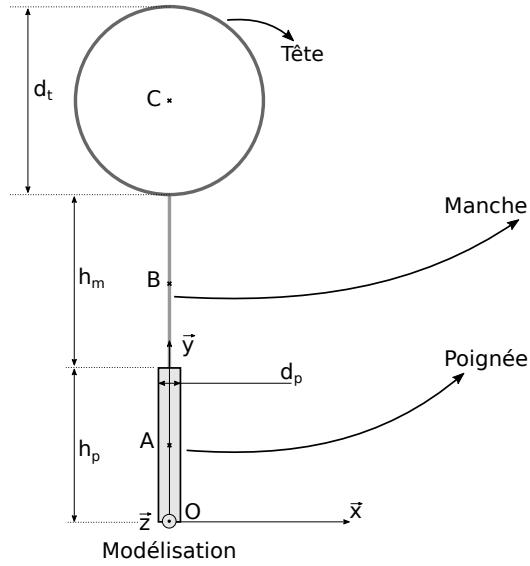
Être capable de déterminer une équation de mouvement

Être capable de déterminer une action mécanique si le mouvement des solides est solide

## 1 Estimation du "swingweight" d'une raquette de badminton ★



Raquette réelle



En badminton, la technicité de la raquette se doit d'être adaptée au type de jeu du joueur. Outre le poids de la raquette, la position de son centre d'inertie ainsi que son moment d'inertie autour de l'axe de rotation du poignet du joueur (A,  $\vec{x}$ ) (appelé "swingweight" en anglais) sont des paramètres indispensables à connaître.

Le poids de la raquette est toujours bien renseigné par les constructeurs mais la position du centre d'inertie et son moment d'inertie sont souvent inconnus. On se propose ici d'estimer ces deux paramètres sur une géométrie de raquette donnée. La raquette est composée : d'une poignée, d'un manche et d'une tête. On donne les dimensions et masses suivantes :

- Poignée (notée p), modélisée par un cylindre de masse  $m_p = 40$  g, de hauteur  $h_p = 20$  cm et de rayon  $r_p = 0.9$  cm. Son centre d'inertie est A et sa matrice d'inertie est :

$$I[A, p] = \frac{m_p}{12} \begin{bmatrix} 3r_p^2 + h_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6r_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3r_p^2 + h_p^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- Manche (noté  $m$ ), modélisé par une tige de masse  $m_m = 13$  g et de hauteur  $h_m = 19$  cm. Son centre d'inertie est  $B$  et sa matrice d'inertie est :

$$I[B, m] = \frac{m_m}{12} \begin{bmatrix} h_m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_m^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- Tête (notée  $t$ ), modélisée par un anneau circulaire de masse  $m_t = 22$  g et de rayon  $r_t = 14.5$  cm. Son centre d'inertie est  $C$  et sa matrice d'inertie est :

$$I[C, t] = \frac{m_t}{12} \begin{bmatrix} \frac{r_t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & r_t^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

**Question 1.** Donner la position du centre de gravité de l'ensemble de la raquette. Expliquer qualitativement l'influence de ce paramètre sur le comportement de la raquette.

**Question 2.** Estimer maintenant le "swingweight" de la raquette. Quel élément de la raquette est le plus important pour limiter le "swingweight" de la raquette ? L'ordre de grandeur du "swingweight" d'une raquette de tennis est  $0.05 \text{ kg.m}^2$ . Comparer ces valeurs et commenter.

## 2 Inertie d'un boomerang ★

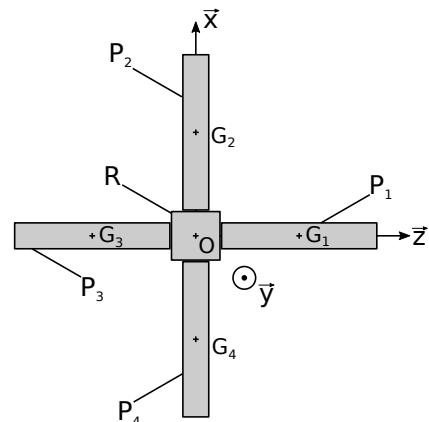
Les aborigènes fabriquent et lancent des boomerangs depuis des millénaires. Mais les principes physiques sur lesquels repose son fascinant retour leur sont longtemps restés inconnus. Et pour cause, les premières explications datent de 1837, et il a fallu attendre 1968 pour qu'une théorie plus étayée soit véritablement mise au point.

On se limite dans ce problème à l'étude des paramètres inertIELS du boomerang.



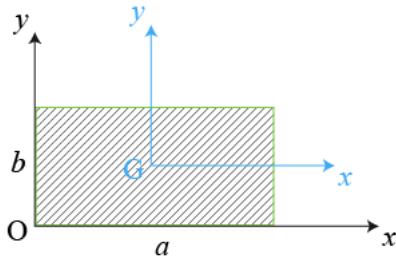
On propose la modélisation définie ci-dessous qui fixe la géométrie. La partie centrale du boomerang, notée  $R$  est assimilée à une plaque carrée d'épaisseur  $e = 8$  mm et de largeur  $l_R = 50$  mm. Les pâles, notées  $P_i$ , sont modélisées par des plaques rectangulaires d'épaisseur  $e$ , de longueur  $l_P = 160$  mm et de largeur  $h_P = 40$  mm.

Le boomerang est en plastique de masse volumique  $\rho$  dont la valeur est inconnue. Le constructeur annonce une masse de 65 grammes.



**Question 1.** Déterminer la masse du boomerang en fonction des paramètres donnés. En utilisant la masse annoncée par le constructeur, donner la valeur de la masse volumique du plastique utilisé. Expliquer pourquoi ce boomerang est adapté à une utilisation sur la plage.

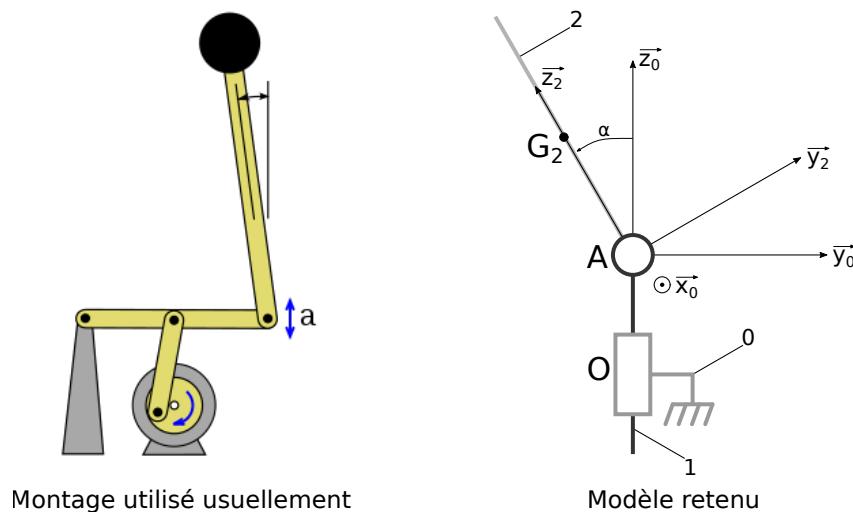
**Question 2.** En vous aidant du formulaire ci-dessous, déterminer la matrice d'inertie du boomerang. Faire les applications numériques.



$$I[G, \text{plaque}] = m_{\text{plaque}} \begin{bmatrix} \frac{b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 + b^2}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

### 3 Pendule de Kapitza ★★

On s'intéresse ici à un pendule inversé, dit pendule de Kapitza, représenté sur la figure ci-dessous. La tige du pendule, notée 2, a la particularité d'être stable si le support mobile, noté 1, a un mouvement oscillatoire de fréquence élevée.



On considère ici que :

- Le support mobile est en liaison glissière avec le bâti. On note  $\vec{OA} = a \cdot \vec{z}_0$  où  $a$  est une fonction du temps telle que  $a(t) = A_0 \sin(\omega t)$ .
- La liaison entre la tige et le support est une liaison pivot avec du frottement visqueux telle que  $\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_0 = -f \cdot \dot{\alpha}$  où  $f$  est le coefficient de frottement visqueux et  $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$  avec  $\vec{x}_0 = \vec{x}_2$ .
- La tige du pendule a une masse  $m$  et son centre de gravité est  $G_2$  tel que  $\vec{AG}_2 = \frac{l}{2} \vec{z}_2$ . Le moment d'inertie de cette tige autour de l'axe ( $A, \vec{x}_0$ ) est noté  $J$ .

**Question 1.** Déterminer l'équation de mouvement faisant apparaître  $\alpha$  et ses dérivées temporelles.

**Question 2.** Montrer qu'en l'absence de mouvement de la pièce 1, le pendule est instable.

### 4 Simulateur de vol ★★★

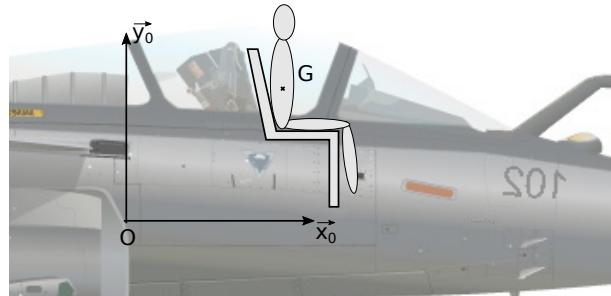
L'apprentissage du pilotage ou la qualification des pilotes sur un nouveau type d'appareil requiert de nombreuses heures de formation "en situation". A cet effet, le simulateur de vol se substitue avantageusement au vol réel, tant au niveau du coût de la formation que de l'étendue des situations qui peuvent être reproduites en toute sécurité. L'objectif de cette partie est de vérifier que le simulateur permet de reproduire correctement la phase de décollage de l'avion. Les performances de l'avion, ici un rafale en décollage sur un porte-avions, que l'on cherche à simuler sont données dans le tableau ci-dessous :

Distance pour le décollage	75 m
Vitesse de décollage	250 km/h
Vitesse de croisière	1715 km/h
Vitesse ascensionnelle	18 290 m/min

Pour l'étude dynamique proposée, on retiendra les notations et les hypothèses suivantes :

**Notations :**  
 t : variable temps  
 $v(t)$  : vitesse de l'avion en fonction du temps  
 a : accélération de l'avion  
 $x(t)$  : déplacement longitudinal de l'avion en fonction du temps

**Hypothèses :**  
 accélération constante durant la phase de décollage ;  
 vitesse nulle à l'origine de la phase de décollage ;  
 déplacement nul à l'origine de la phase de décollage.



Avion en phase de décollage sur un porte-avions

**Question 1.** A l'aide des données sur les performances de l'avion, calculer son accélération, notée  $a$ , pendant la phase de roulage avant le décollage. Exprimée en  $m/s^2$ , on arrondira à la valeur entière la plus proche.

On étudie ici la simulation d'une **phase de décollage**. Sur le simulateur considéré, il n'est pas possible de réaliser des mouvements de translation longitudinaux dans la direction  $\vec{x}_0$  ; pour palier cet inconvénient, les ingénieurs ont choisi de faire sentir physiquement les effets de l'accélération au pilote en inclinant les différents éléments de la centrifugeuse. Pour maintenir la sensation de ce mouvement uniformément accéléré, c'est le système de vision (grâce aux écrans LCD) qui ensuite trompe le pilote en poursuivant le mouvement.

Deux situations sont bien distinguées ici :

**Situation 1 :** Dans le véritable avion en phase de décollage, le pilote assis sur son siège ressent les effets de la pesanteur ainsi que de l'accélération de l'avion qui le plaque contre son siège. Dans cette situation, on propose le paramétrage suivant :

$$\overrightarrow{OG} = x(t)\vec{x}_0 + h\vec{y}_0 \text{ et } (\vec{x}_0, \vec{x}_a) = (\vec{y}_0, \vec{y}_a) = 0$$

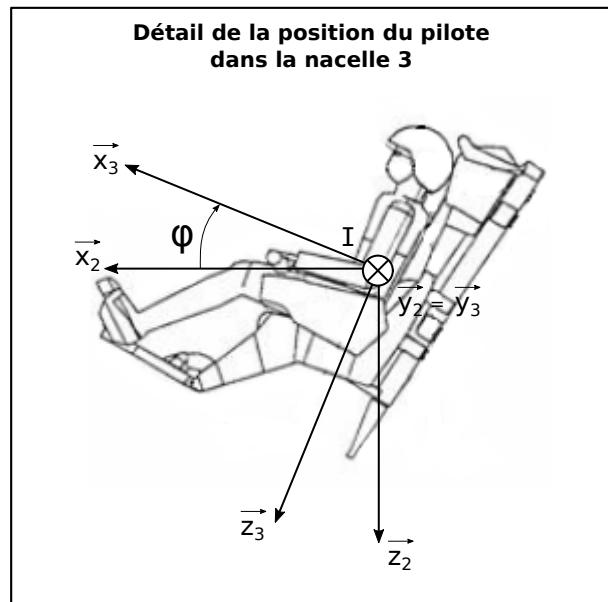
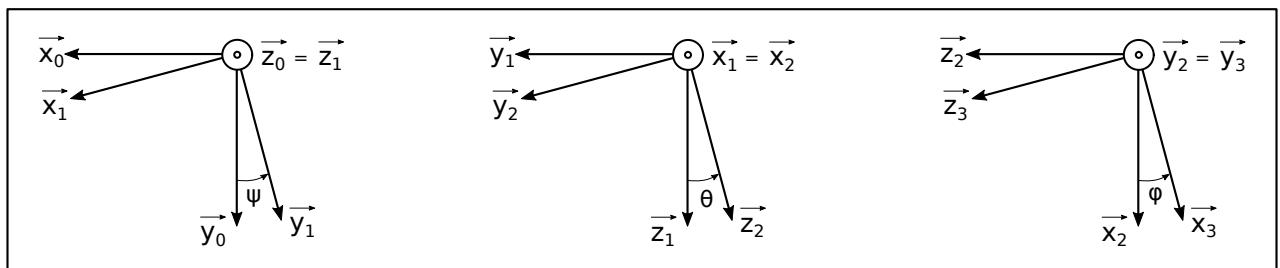
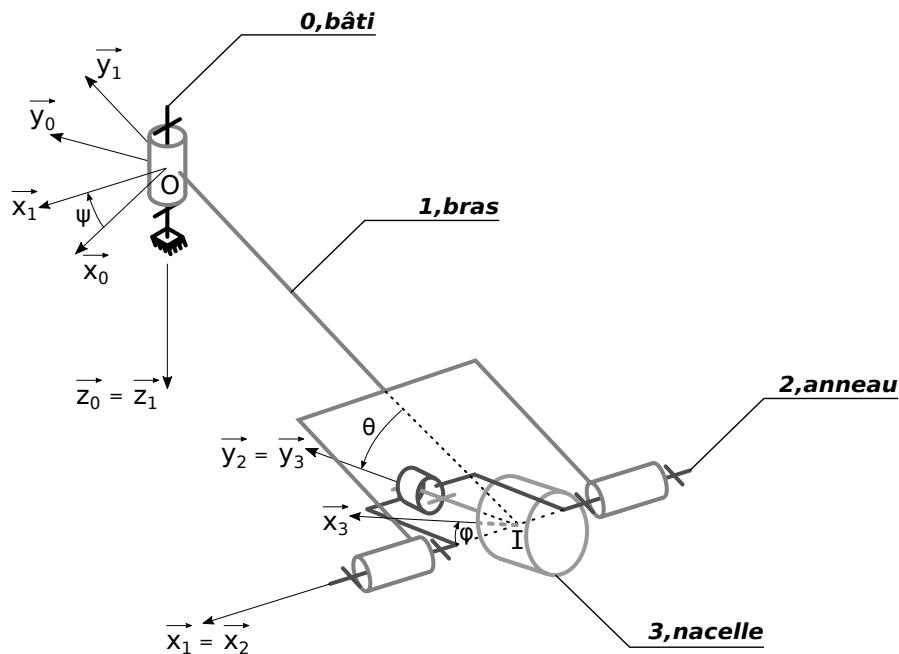
**Situation 2 :** Dans le simulateur, on met en mouvement différents éléments pour faire croire au pilote qu'il accélère. Pour accroître le ressenti, des images sont présentées au pilote sur un écran.

Nous allons comparer ces deux situations afin de déterminer la condition à vérifier pour que la sensation d'accélération soit la plus réaliste possible.

**Question 2.** On considère le pilote installé dans l'avion (situation 1). Le mouvement de l'avion par rapport au référentiel Galiléen  $R_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est une translation rectiligne d'accélération  $a$  constante. La masse du pilote est notée  $m$  et le moment d'inertie du pilote par rapport à l'axe  $(G, \vec{z}_a)$  est noté  $I_G$ . Déterminer le torseur des actions de liaison entre le

pilote et son siège (on considère le pilote encastré sur le siège). Le pilote est supposé se comporter comme un solide indéformable.

Les figures ci-dessous présentent une centrifugeuse où l'on reconnaît une structure cinématique ouverte à quatre corps (support (0), bras (1), anneau (2) et nacelle (3)) assemblés par liaison pivot.



Ce simulateur est donc constitué :

- d'un bras 1 de longueur  $OI = R$ , en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  par rapport au bâti 0. Sa position est paramétrée par l'angle  $\psi$ .

- d'un anneau 2 en liaison pivot d'axe  $(I, \vec{x}_1)$  et de paramètre  $\theta$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{y}_1)$  lié au bras 1.  $\theta$  est l'angle de roulis.
- d'une nacelle 3 dans laquelle prend place le pilote, en liaison pivot d'axe  $(I, \vec{y}_2)$  et de paramètre  $\varphi$  par rapport à l'axe  $(I, \vec{x}_2)$  lié à l'anneau 2.  $\varphi$  est l'angle de tangage. On suppose donc que le pilote est encastré avec la nacelle 3.

L'actionneur de tangage est essentiellement dimensionné par les couples qu'il doit fournir durant les phases d'accélération du bras. La vitesse du bras sera considérée comme variable.

### Approche cinématique

On définit le vecteur accélération  $\vec{a}_{I \in 3/0}$ .

On note aussi  $\vec{G} = \vec{g} - \vec{a}_{I \in 3/0}$  le vecteur qui caractérise le nombre de « g » subi par le pilote en  $I$  au cours de l'exercice. L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  est telle que  $\vec{g} = g \vec{z}_0$ .

**Question 3.** Déterminer l'action du siège de la nacelle 3 sur le pilote. Exprimer notamment la résultante de 3 sur le pilote en fonction de  $\vec{G}$ .

**Question 4.** Calculer le vecteur  $\vec{V}_{I \in 3/0}$  du point  $I$  dans le mouvement de 3 par rapport à 0. Donner son expression en projection dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

**Question 5.** Calculer le vecteur accélération  $\vec{a}_{I \in 3/0}$  en projection dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

**Question 6.** Projeter ce vecteur dans la base  $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  liée à la nacelle 3. On notera alors  $G_X$ ,  $G_Y$ , et  $G_Z$  les composantes.

**Question 7.** En déduire la condition sur  $\theta$  pour générer une composante  $G_Y$  nulle en fonction de  $R$ ,  $g$  et  $\psi$ .

**Question 8.** Dans cette condition, calculer  $G_X$  et  $G_Z$ .

**Question 9.** Quelles seront les ressentis du pilote dans les cas où  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (on se placera dans le cas où  $\dot{\psi} \rightarrow +\infty$ ).

### Approche dynamique

On cherche maintenant à déterminer les couples :

- $C_{01}$  qui permet la mise en rotation de l'ensemble { 1, 2, 3 } ;
- $C_{23}$  qui permet l'inclinaison de la nacelle (3) par rapport à l'anneau (2).

On notera  $I(I, 3) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$  : la matrice d'inertie du solide 3. Ce solide 3 est de masse  $m$  et de centre d'inertie  $I$ . On négligera l'inertie de l'anneau (2). Le bras (1) possède un moment d'inertie  $J_1$  autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ .

**Question 10.** Déterminer l'équation de mouvement permettant de faire intervenir le couple moteur  $C_{01}$ . Se placer dans le cas où  $\dot{\theta} = 0$  et  $\dot{\varphi} = 0$ .

**Question 11.** Déterminer maintenant l'équation de mouvement permettant de faire intervenir le couple moteur  $C_{23}$  (se placer également dans le cas où  $\dot{\theta} = 0$  et  $\dot{\varphi} = 0$ ).

## 5 Roue autonome pour fauteuil roulant ★★

La roue autonome *ez-Wheel* propose une solution simple pour tracter des équipements de manutention et des véhicules légers. Le stator de la roue *ez-Wheel* est fixé sur le châssis de l'engin à déplacer et son rotor est assemblé directement sur sa roue.

La solution intègre, au sein d'une roue, tous les composants nécessaires à la traction : motorisation électrique, batteries haute énergie et longue durée, contrôleur de puissance assurant un pilotage optimal et gestion de la batterie ainsi qu'une interface de commande sans fil. La transmission de l'énergie est réalisée par un variateur incorporé à la carte de commande, un moteur *brushless*, puis un réducteur (voir figure ci-dessous).

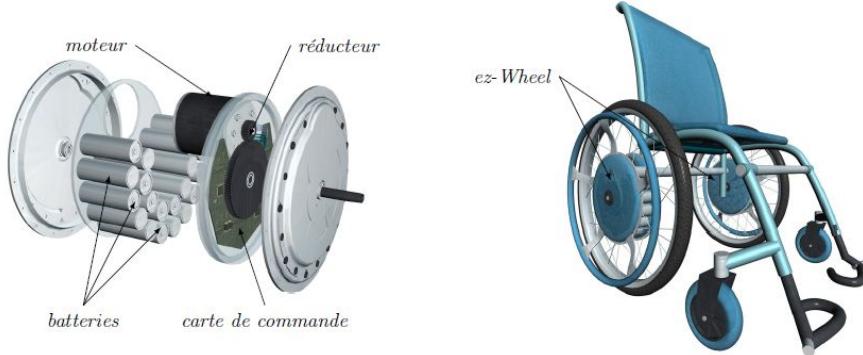


Figure 1: Implantation et structure d'une roue *ez-Wheel*

**Objectif :** L'objectif de l'étude proposée est d'étudier l'implantation de la roue autonome sur un fauteuil roulant afin de valider les performances du moteur implanté.

Les différentes normes relatives à l'accessibilité des espaces publics aux personnes à mobilité réduite imposent certaines réalisations au niveau des accès aux bâtiments. Les escaliers, infranchissables pour une personne à mobilité réduite, doivent être remplacés ou complétés par des rampes d'accès. Ces rampes peuvent avoir une pente maximale de 12% (soit environ  $6.8^\circ$ ).

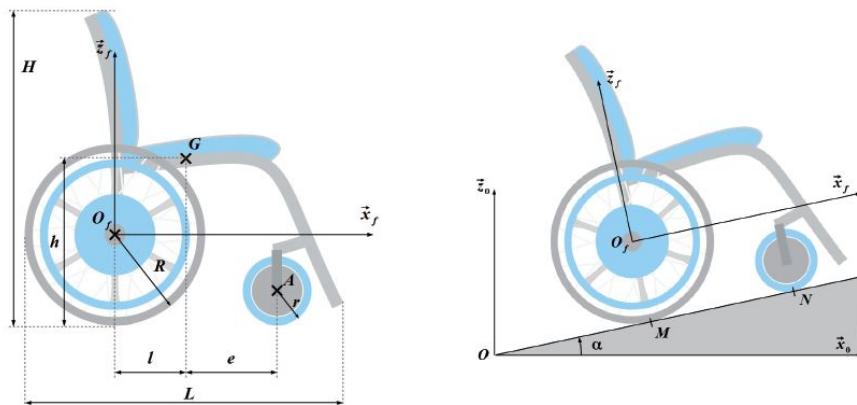


Figure 2: Dimensions du fauteuil et paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente

La figure 2 donne les dimensions du fauteuil motorisé ainsi que le paramétrage en phase de montée. Les hypothèses d'étude de cette partie sont les suivantes :

- Le référentiel  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , lié au sol, est supposé galiléen.
- Le fauteuil se déplace en ligne droite dans une phase de montée, le problème est considéré comme plan. Le référentiel  $R_f(O_f, \vec{x}_f, \vec{y}_f, \vec{z}_f)$  est lié au fauteuil avec  $\vec{y}_0 = \vec{y}_f$ .
- L'accélération de la pesanteur est telle que  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$  avec  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ .
- Le vecteur position du fauteuil est  $\overrightarrow{OO_f} = x(t) \vec{x}_f + R \vec{z}_f$ .

- Chacun des motoréducteurs implanté dans les roues (gauche et droite) fournit le même couple, noté  $C_m$  (ils peuvent fournir 70 Nm au maximum). Pour simplifier l'étude, le problème est supposé équivalent à un seul motoréducteur qui fournit un couple  $2 C_m$  sur une seule roue arrière.
- De la même manière les deux roues avant sont modélisées par une seule roue se situant dans le plan de l'étude.
- L'ensemble  $(S) = \{ \text{fauteuil} + \text{roues avant} + \text{roues motorisées} + \text{utilisateur} \}$  a une masse  $M_S$  de 150 kg, son centre d'inertie est  $G$ .
- Le contact entre les roues arrières et le sol se fait avec frottement : le coefficient associé est  $f = 0.45$ .
- L'inertie et la masse des roues et celles des motoréducteurs sont négligés.
- Les roues arrières sont en liaisons pivots d'axe ( $O_f, \vec{y}_f$ ) par rapport au châssis du fauteuil.
- Les liaisons autres que celles des roues avec le sol sont considérées comme parfaites.

Les dimensions du fauteuil sont celles d'un fauteuil classique :  $e = 400 \text{ mm}$  ;  $h = 600 \text{ mm}$  ;  $H = 1000 \text{ mm}$  ;  $l = 200 \text{ mm}$  ;  $L = 1300 \text{ mm}$  ;  $r = 150 \text{ mm}$  et  $R = 400 \text{ mm}$ .

**Question 1 :** Donner les expressions des torseurs des actions mécaniques transmissibles en faisant apparaître les composantes nulles et le repère choisi :

- du sol sur le fauteuil au niveau de la roue avant  $\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{roue avant}}\}$  au point  $N$ .
- du sol sur le fauteuil au niveau de la roue arrière  $\{\mathcal{T}_{\text{sol} \rightarrow \text{roue arrière}}\}$  au point  $M$ .
- de la pesanteur sur l'ensemble  $(S)$   $\{\mathcal{T}_{\text{poids} \rightarrow S}\}$  au point  $G$ .

**Question 2 :** En isolant les roues avant, montrer que l'effort tangentiel (suivant  $\vec{x}_f$ ) du sol sur les roues avant peut être négligé.

**Question 3 :** Donner l'expression du moment dynamique galiléen de l'ensemble  $(S)$  en  $G$ , noté  $\vec{\delta}_{S/R_0}(G)$ .

**Question 4 :** Écrire les trois équations scalaires issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble  $(S)$  en projection dans  $R_f$  au point  $G$ .

**Question 5 :** En déduire l'accélération maximale du fauteuil  $\ddot{x}$  pour être à la limite du glissement. Faire l'application numérique pour une pente en béton humide de 12 % ( $f = 0.45$ ).

**Question 6 :** En appliquant le théorème du moment dynamique à la roue arrière, déterminer la relation entre le couple  $C_m$  et l'accélération  $\ddot{x}$ . Faire l'application numérique dans les conditions de limite de glissement.

**Question 7 :** Pour cette valeur  $C_m$ , déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de l'action mécanique du sol sur la roue avant. Conclure sur le comportement du fauteuil dans une telle configuration.

Pour la question suivante, le contact entre les roues arrière et le sol se fait toujours avec frottement mais n'est plus à la limite du glissement. Le couple moteur est 70 Nm sur chacune des deux roues motorisées.

**Question 8 :** Calculer l'accélération du fauteuil. Les moteurs, mis en place sur le fauteuil, permettent-ils de respecter les normes d'accès au bâtiment ? Le fauteuil risque-t-il de basculer ?