

## DS SCIENCES PHYSIQUES N°5

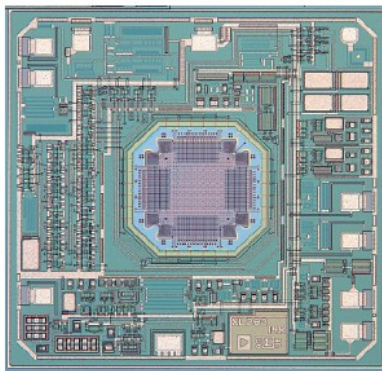
### Problème 1: accéléromètre MEMS

La miniaturisation, la fiabilité et le faible coût des capteurs à MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems) permettent de les intégrer dans de nombreux dispositifs électroniques embarqués. La plupart des accéléromètres à MEMS permettent de mesurer les accélérations suivant deux axes.

En aéronautique, les accéléromètres sont utilisés en tant que tels dans les avions soumis à de fortes contraintes, avions de chasse ou de voltige, et couplés à des gyromètres ils entrent dans la composition de centrales à inertie.

#### I- Étude mécanique du capteur

On limite l'étude à la modélisation du fonctionnement d'un accéléromètre à un seul axe. Un accéléromètre est modélisé par un système masse-ressorts amorti, dont le schéma de principe est représenté sur la figure 1. On suppose que les déplacements ne s'effectuent que selon l'axe Ox horizontal. L'accéléromètre se compose d'une masse mobile  $m$ , assimilée à un point matériel C, astreinte à se déplacer sans frottements secs selon l'axe horizontal Ox. Le boîtier rigide de l'accéléromètre, de longueur  $L$  selon l'axe Ox, de centre B se déplace dans le référentiel terrestre (R) supposé galiléen et on note  $\vec{a} = a \vec{e}_x$  son accélération dans ce référentiel.



1 cm  
Photographie d'un accéléromètre deux axes : le capteur MEMS est situé au centre (source *Analog Devices*)

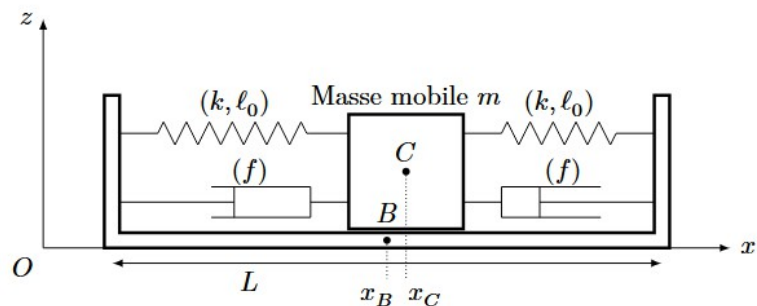


Schéma de principe du fonctionnement mécanique de l'accéléromètre suivant un axe

Figure 1 Accéléromètre MEMS

On note à un instant  $t$  quelconque,  $x_C$  la position de la masse mobile en mouvement,  $x_B$  la position du centre du boîtier et  $X = x_C - x_B$  la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier.

Lorsque le boîtier de l'accéléromètre est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme, la position de la masse mobile par rapport au centre du boîtier vérifie  $X = 0$  et la longueur des ressorts est égale à leur longueur à vide  $l_0$ . Lorsque le boîtier subit une accélération, la masse mobile quitte la position définie précédemment.

**L'étude mécanique sera faite dans le référentiel (R<sub>b</sub>) lié au boîtier de l'accéléromètre.**

La masse mobile est soumise à des forces de frottement visqueux dont la résultante est proportionnelle à

la vitesse relative de la masse mobile par rapport au boîtier  $\vec{F}_f = -2f \frac{dX}{dt} \vec{e}_x$  où  $f > 0$  est le coefficient de frottement visqueux ;

### 1- Mise en équation

a- Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur la masse mobile dans le référentiel (Rb) lié au boîtier .

Montrer que la résultante des forces de rappel exercées par les deux ressorts s'écrit  $\vec{T} = -2kX\vec{e}_x$  .

b- Montrer que, lorsque le boîtier subit une accélération, l'équation différentielle vérifiée par l'élongation

$X$  s'écrit :  $\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = -a$  avec  $\omega_0$  et  $Q$  deux constantes que l'on exprimera en fonction de  $k, m$  et  $f$  .

c- Quelle est la signification physique de  $\omega_0$  et  $Q$  ? Quelles sont les dimensions et les unités de ces deux grandeurs ?

### 2- Étude de la réponse harmonique

On recherche maintenant les conditions pour lesquelles l'élongation  $X$  est directement proportionnelle à l'accélération  $a$  du boîtier. Pour cela, on étudie la réponse du capteur en régime harmonique établi.

a- La grandeur d'entrée du capteur étant l'accélération  $a(t) = a_m \cos(\omega t)$  , sous quelle forme mathématique doit-on rechercher la grandeur de sortie  $X(t)$  ?

b- Établir la relation entre l'amplitude complexe de l'élongation  $\underline{X}_m$  et celle de l'accélération  $a_m$  .

La fréquence typique de résonance mécanique du capteur d'un accéléromètre à MEMS est de l'ordre de 5,5 kHz et son facteur de qualité est voisin de 5.

c- Déterminer l'expression de la fréquence  $f_r$  à laquelle se produit un phénomène de résonance. Commenter.

d- Après avoir étudié le comportement asymptotique de  $\frac{X_m \omega_0^2}{a_m}$  , montrer qu'il existe un domaine de fréquences, que l'on précisera, pour lequel on peut considérer que l'élongation  $X$  est directement proportionnelle à l'accélération  $a$  du boîtier et vérifie  $X(t) = \frac{-m}{2k} a(t)$  .

Pour la suite du problème, on considère que le domaine de fréquences dans lequel le capteur de l'accéléromètre est utilisé est tel que la relation précédente soit vérifiée.

e- Déterminer la valeur numérique de l'amplitude finale du déplacement de la masse mobile pour une accélération constante de « 1g » ( $\approx 9.81$  g), correspondant à l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre.

Commenter le résultat.

## II- Étude de la détection par une méthode électrostatique

On s'intéresse dans cette partie au système de détection du déplacement  $X$  de la masse mobile de l'accéléromètre pour cela on utilise un condensateur à écartement variable dont les électrodes successives sont liées alternativement à la masse mobile et au boîtier.

### 1- Condensateur unique

Une première méthode, dont le principe est représenté sur la figure 2, consiste à mesurer la capacité d'un condensateur dont une électrode, liée à la masse mobile, fait face à une électrode fixe liée au boîtier de l'accéléromètre. Le déplacement de la masse mobile modifie la distance entre les deux électrodes et par voie de conséquence la capacité du condensateur.

On applique une différence de potentiel  $U$  entre les deux électrodes, l'électrode fixe étant portée au potentiel  $V_a$  et l'électrode mobile étant reliée à la masse. Les deux électrodes sont assimilées à deux plans infinis parallèles séparés d'une distance  $e + X$ . Les charges qui apparaissent sur chacune des électrodes se répartissent uniformément en surface. On note  $+\sigma$  la charge surfacique portée par l'électrode fixe liée au boîtier.

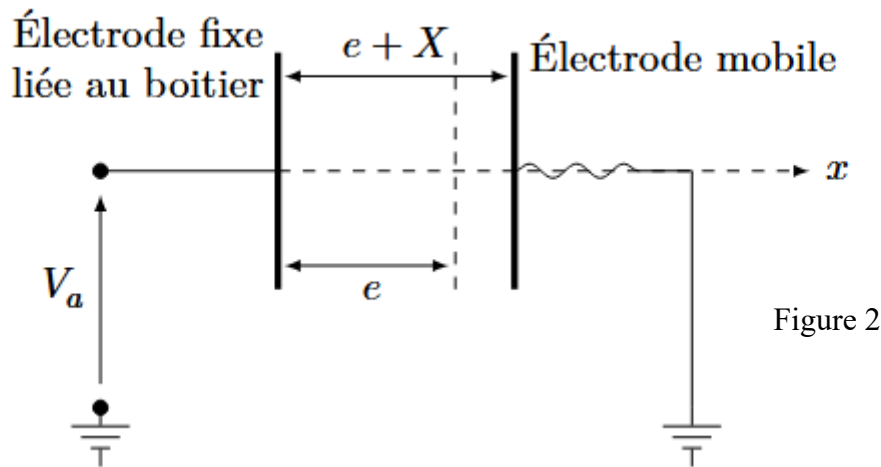


Figure 2

### Détermination du champ électrostatique créé par l'électrode fixe

- a- En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charges, préciser, en les justifiant, la direction du champ électrostatique créé par l'électrode fixe  $\vec{E}_1(M)$  et les variables dont il dépend.
- b- Comparer les champs  $\vec{E}_1(M)$  et  $\vec{E}_1(M')$  créés par l'électrode fixe en deux points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport à l'électrode fixe.
- c- Déterminer l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}_1(M)$  créée par l'électrode fixe en tout point de l'espace.

### Détermination de la relation entre $C$ et $X$ .

- d- Déterminer l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  qui règne dans le condensateur puis celle de la différence de potentiel  $U$  entre les deux électrodes en fonction de  $Q, e, X, S$  et  $\epsilon_0$ ,  $Q$  représente la charge portée par l'électrode fixe de surface  $S$ .
- e- Montrer que la capacité du condensateur s'écrit  $C = C_0 \frac{e}{e + X}$  où  $C_0$  est la capacité du condensateur pour  $X = 0$ .

### Imperfection du dispositif

- f- Montrer que la force électrostatique  $\vec{F}$  qu'exerce l'électrode fixe sur l'électrode mobile s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_0 U^2 \frac{e}{(e + X)^2} \vec{e}_x$$

Les caractéristiques typiques d'un accéléromètre à MEMS sont  $C_0 = 1 \text{ pF}$ ,  $e = 1 \mu\text{m}$ ,  $V_a = 1 \text{ V}$ , et la masse mobile est de  $1 \mu\text{g}$ .

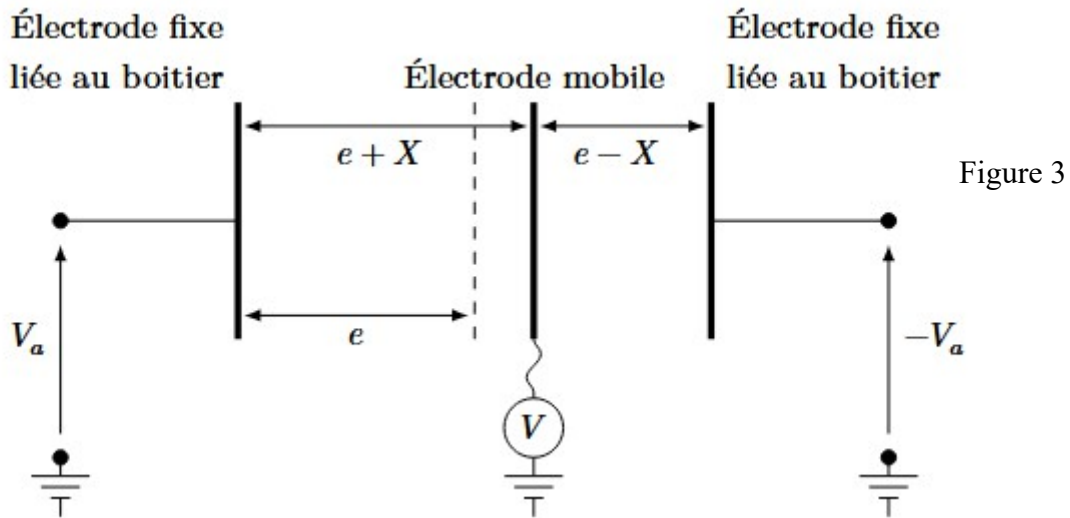
- g- Pour  $X = 0$ , donner l'ordre de grandeur de la force électrostatique s'exerçant sur l'électrode liée à la masse mobile.

- h- Discuter la faisabilité de réaliser une mesure capacitive du déplacement de la masse mobile d'un accéléromètre à MEMS prévu pour mesurer des accélérations de «  $1 \text{ g}$  » ( $1 \text{ g} = 9.8 \text{ m/s}^2$ ).

### 2- Condensateur double différentiel

Dans les accéléromètres à MEMS, la méthode de mesure consiste à déterminer le potentiel électrostatique  $V$  de l'électrode liée à la masse mobile. Le schéma de principe de la méthode de mesure est représenté

figure 3. Une seconde électrode fixe, liée au boîtier, est placée symétriquement par rapport à  $X=0$ . La première électrode fixe est portée au potentiel  $V_a$ , la seconde au potentiel  $-V_a$ . L'électrode mobile, qui reste isolée et globalement neutre, sert alors de sonde de mesure du potentiel  $V$  qui est fonction du déplacement  $X$  de l'électrode mobile entre les deux électrodes fixes liées au boîtier.



Dans cette configuration, le potentiel  $V$  de l'électrode mobile s'écrit  $V = -V_a \frac{X}{e}$ .

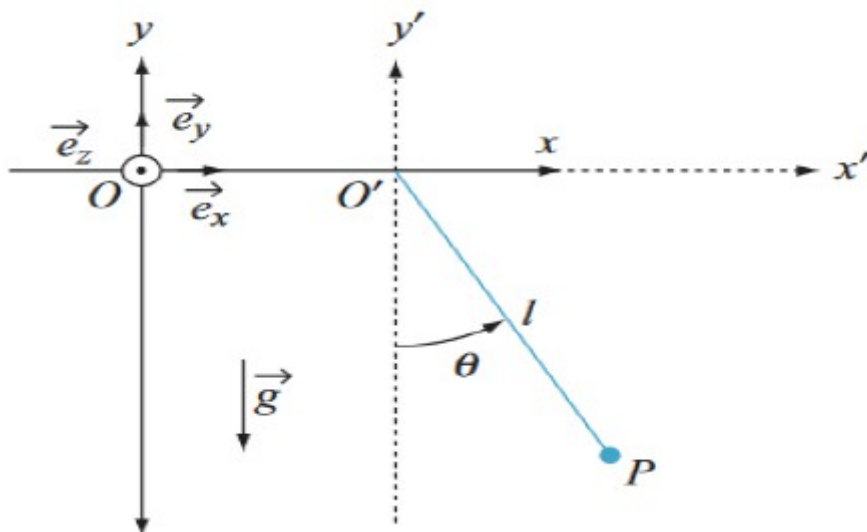
- En utilisant l'expression établie en II- 1-f-, calculer la résultante des forces électrostatiques s'exerçant sur l'électrode mobile.
- Conclure sur les avantages de cette méthode de mesure.

## Problème 2:

### Partie A : pendule simple

On désigne par  $R' (O' x' y' z')$  un référentiel d'origine  $O'$  dont les axes sont parallèles aux axes du référentiel  $R (O x y z)$  que l'on supposera galiléen.

Un pendule simple est constitué d'un point matériel  $P$  de masse  $m$ , suspendu à l'origine  $O'$  de  $R'$  par un fil sans masse et de longueur  $l$ . On note  $\theta$  l'angle que fait le fil, que l'on supposera constamment tendu, avec la verticale  $O' y'$ .



Le point O' est animé d'un mouvement de translation uniformément accéléré d'accélération  $\vec{a} = a \vec{e}_x$  avec  $a > 0$ .

On travaille dans le référentiel R'.

- 1- Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur le point P dans le référentiel R'.
- 2- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$  à partir de la deuxième loi de Newton écrite dans R'.
- 3- Retrouver l'équation précédente en utilisant le théorème du moment cinétique appliqué en O' dans R'.
- 4- Déterminer l'expression de la valeur  $\theta_e$  de l'angle  $\theta$  correspondant à la position d'équilibre du pendule dans le référentiel R'.
- 5- Déterminer l'expression de la période T des petits mouvements autour de la position d'équilibre  $\theta_e$  en fonction de  $l, a$  et  $g$ .

### Partie B : anneau sur une tige en rotation.

On considère un petit anneau M de masse m, considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottements le long d'une tige OA, de longueur  $l$ , effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire  $\omega$  constante autour d'un axe fixe vertical  $(\Delta)$  passant par son extrémité O.

Le référentiel lié au laboratoire sera considéré comme galiléen.

L'espace est rapporté au repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au laboratoire.

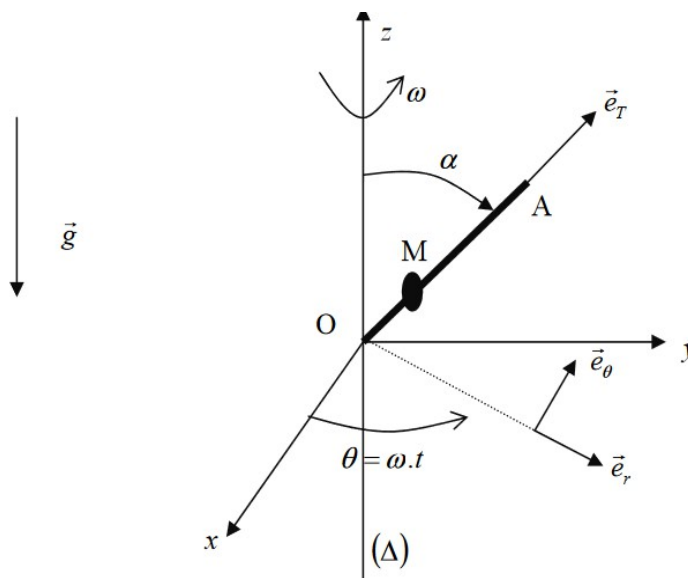
On pourra lors des calculs vectoriels utiliser les vecteurs unitaires  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_T$  définis de la manière suivante :

- $\vec{e}_r$  : vecteur unitaire du plan (Oxy) dirigé suivant la projection de la tige sur le plan (Oxy).
- $\vec{e}_\theta$  : vecteur unitaire du plan (Oxy), perpendiculaire au vecteur  $\vec{e}_r$  et tel que le repère  $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  soit un repère direct.
- $\vec{e}_T$  : vecteur unitaire de la tige et orienté de O vers A

La tige OA fait un angle  $\alpha$  constant ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ) avec l'axe  $(\Delta)$ . La tige tourne autour de  $(\Delta)$  avec la vitesse angulaire constante  $\omega$ .

On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ( $r = OM$ ). L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance  $r_0$  du point O ( $r_0 < l$ ).

L'étude est menée dans le référentiel  $(R') = (O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  lié à la tige.



1- L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige.

Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces.

Ecrire l'expression des forces d'inertie en fonction d'une partie des données, de  $r(t)$  et de sa dérivée temporelle et des vecteurs unitaires définis précédemment.

2- En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel  $(R')$ , établir l'équation différentielle vérifiée par  $r(t)$ .

3- Intégrer l'équation différentielle du mouvement en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution  $r(t)$  en fonction de  $r_0, g, \omega, t$  et  $\alpha$ .

4- Déterminer la position d'équilibre  $r_{eq}$  de l'anneau sur la tige. Exprimer  $r_{eq}$  en fonction de  $g, \omega$  et  $\alpha$ .

Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre de l'anneau sur la tige OA que si la vitesse angulaire  $\omega$  est supérieure à une valeur seuil  $\omega_0$  que l'on déterminera. Exprimer  $\omega_0$  en fonction de  $\alpha, g$  et  $l$ .

5- On se place dans le cas où  $\omega > \omega_0$  l'anneau étant dans sa position d'équilibre. On écarte légèrement l'anneau de cette position d'équilibre.

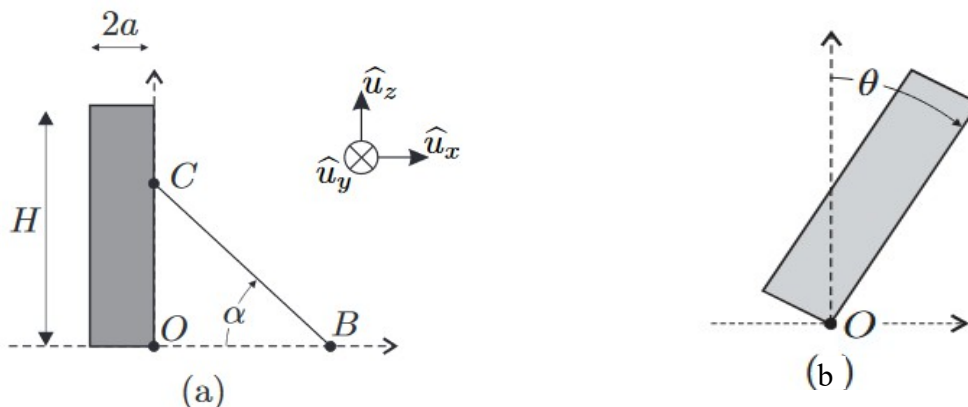
Déterminer, en la justifiant, l'orientation de la résultante des forces appliquées à l'anneau ? En déduire si l'équilibre est stable ou instable.

6- Déterminer l'énergie potentielle de pesanteur ainsi que l'énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement. Retrouver les réponses des questions 4 et 5 à l'aide d'une étude énergétique.

### **Problème 3 : Chute d'un arbre mort .**

**Les vecteurs unitaires sont notés avec des chapeaux .**

Un bûcheron assimilé à un point matériel B de masse  $m$  souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse  $M$  avec  $M > m$ , de hauteur  $H$  et de section carrée de côté  $2a$  représenté sur la figure (a) ci-dessous .



Il tire pour cela sur un câble fixé en C à l'arbre, de longueur  $BC = l$  et de masse négligeable, afin de faire tourner l'arbre autour de l'axe  $(O, \hat{u}_y)$  dirigé par le vecteur  $\hat{u}_y = \hat{u}_z \wedge \hat{u}_x$ .

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force  $\vec{R}_1 = T_1 \hat{u}_x + N_1 \hat{u}_z$  appliquée au point O et satisfaisant aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement  $f$ . De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force  $\vec{R}_2 = T_2 \hat{u}_x + N_2 \hat{u}_z$  appliquée au point B et satisfaisant aux lois de Coulomb avec le même coefficient de frottement  $f$ . Les composantes  $T_1, N_1, T_2$  et  $N_2$  ont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu.

**On note  $\vec{F}$  la force exercée par le câble sur l'arbre au point C, supposée parallèle au câble et  $F$  sa norme .**

Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique autour de  $(O, \hat{u}_y)$  et on note  $\alpha$  l'angle ( positif ) entre  $\vec{BO}$  et  $\vec{BC}$  .

1- **Le bûcheron est supposé ne pas glisser** dans la situation initiale décrite par la figure (a). Exprimer  $N_2$  et  $T_2$  en fonction de  $F$ ,  $\alpha$ ,  $m$  et  $g$ . En déduire l'expression de la valeur maximale  $F_{\max}$  de  $F$  en fonction de  $f$ ,  $m$ ,  $g$  et  $\alpha$  . ( on considérera que  $mg > F \sin \alpha$  ) .

2- L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure (a). Exprimer  $N_1$  et  $T_1$  en fonction de  $F$ ,  $\alpha$ ,  $M$  et  $g$ . En déduire que pour  $0 \leq F \leq F_{\max}$  le glissement n'est pas possible en O .

3- Exprimer le moment  $\Gamma_g$  du poids de l'arbre par rapport à l'axe  $(O, \hat{u}_y)$  dans la situation initiale décrite par la figure (a).

4- Soit  $\Gamma_B$  le moment par rapport à l'axe  $(O, \hat{u}_y)$  exercé par le bûcheron sur l'arbre via le câble. Quelle est la valeur minimale de  $\Gamma_B$  permettant à l'arbre de pivoter autour de l'axe  $(O, \hat{u}_y)$  ?

5- En supposant  $F$  constant, justifier qu'il existe une valeur optimale  $\alpha_m$  de l'angle  $\alpha$  pour laquelle  $\Gamma_B$  est maximal . On suppose que, quelque soit l'angle  $\alpha$ , l'action du bûcheron est telle que l'on est à la limite du glissement :  $F$  prend la valeur  $F_{\max}$  .

6- Montrer que le moment  $\Gamma_B$  par rapport à l'axe  $(O, \hat{u}_y)$  exercé par le bûcheron via le câble s'écrit  $\Gamma_B = \frac{mgl}{\Phi(\alpha)}$

avec  $\Phi(\alpha) = \frac{1}{f \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$  . En déduire l'expression de  $\alpha_m$  en fonction de  $f$ .

Vérifier que  $\alpha_m = \frac{\pi}{4}$  pour  $f=1$  .

7- On donne  $M = 10^3 \text{ kg}$ ,  $H = 20 \text{ m}$ ,  $a = 0,5 \text{ m}$ ,  $m = 10^2 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  et  $f = 1$  . Calculer la force  $F_{\max}$  et la longueur  $l$  de corde nécessaires pour initier la rotation de l'arbre. Commenter.

On suppose que l'arbre a commencé sa rotation autour de l'axe  $(O, \hat{u}_y)$ , repérée par l'angle  $\theta$  que fait  $\vec{OC}$  avec  $(O, \hat{u}_z)$ . ( figure (b) )

8- Après avoir fait une figure représentant la situation et faisant apparaître les différents paramètres, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  de l'arbre en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $H$ ,  $a$  et  $\theta$ . Le bûcheron opère de manière quasi-statique c'est-à-dire sans communiquer d'énergie cinétique à l'arbre. A partir de quel angle  $\theta$  peut-il lâcher le câble?