

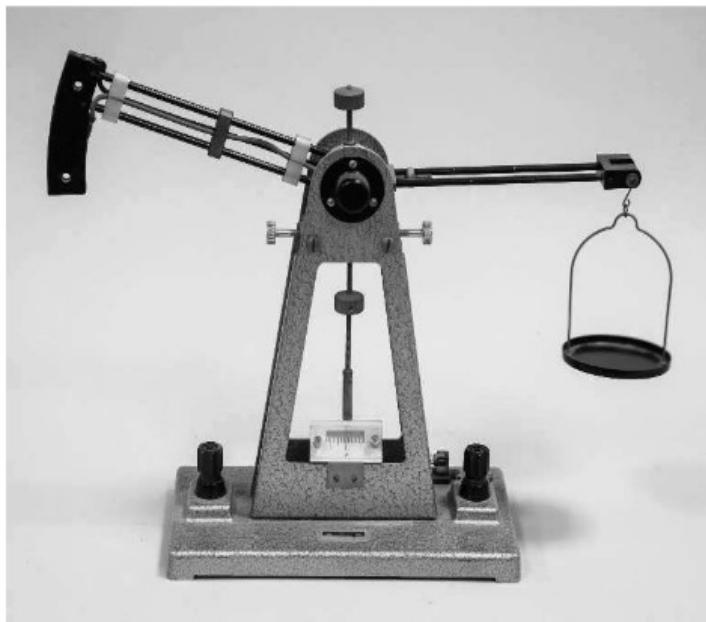
**DM SCIENCES PHYSIQUES N° 10****Mesures de champs magnétiques**

Dans ce problème sont abordées quelques méthodes de mesure de champs magnétiques, permanents ou éventuellement lentement variables dans le temps. Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau .

Le référentiel terrestre sera considéré comme galiléen. On rappelle que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**I- La balance de Cotton**

La photo d'un modèle de balance de Cotton est placée ci-dessous. Ce type de balance, destinée à la mesure de champ magnétique, a été mis au point par Aimé Cotton en 1900. Elle est constituée de deux fléaux. L'un, à gauche, comprend sur sa périphérie, un conducteur métallique qui sera parcouru par un courant et dont une partie sera placée dans le champ magnétique, uniforme et permanent, à mesurer. Le conducteur sera soumis à des forces de Laplace et la balance penchera du côté de ce fléau. L'autre comporte un plateau sur lequel on peut déposer des masses marquées pour équilibrer la balance et déduire ainsi la norme du champ magnétique. Le schéma de principe de la balance est représenté sur la figure 1 .



Sur le fléau dessiné à gauche, les conducteurs permettent le passage d'un courant d'intensité  $i$ , selon le parcours  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6$ . Les portions de circuit  $A_2A_3$  et  $A_4A_5$  sont des arcs de cercle de même centre  $O$ . L'ensemble des deux fléaux constitue un système rigide, mobile sans frottement, autour d'un axe horizontal passant par le point  $O$  et noté  $Oz$ .

On désigne par  $C$  le milieu du segment  $A_3A_4$  et  $D$  le point de suspension du plateau. On note  $d_1$  la distance  $OC$  entre les points  $O$  et  $C$ ,  $d_2$  la distance  $OD$  entre les points  $O$  et  $D$  et  $l$  la longueur du segment  $A_3A_4$ .

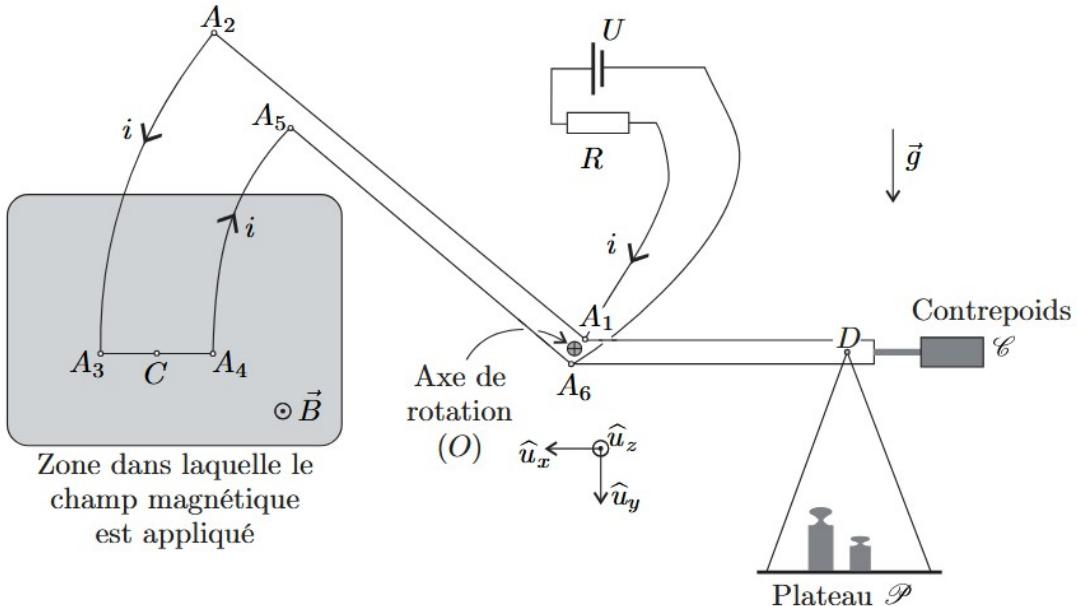


FIGURE 1 – Schéma de principe de la balance

La procédure de mesure est la suivante :

1- Equilibrage « à vide » : en l'absence de courant  $i$  et de masses marquées dans le plateau, le contrepoids  $C$  est déplacé de façon à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points  $C$ ,  $O$  et  $D$  étant alignés sur l'horizontale.

2- Mesure du champ : on ferme le circuit électrique, ce qui permet au courant d'intensité  $i$  de circuler « dans la balance », le fléau de gauche penche vers le bas ; on ajoute alors des masses dans le plateau jusqu'à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points  $C$ ,  $O$  et  $D$  étant alignés sur l'horizontale.

1 - Montrer que, lorsque l'équilibrage à vide est réalisé, le centre de masse,  $G$ , des parties mobiles de la balance est situé sur la verticale passant par  $O$  .

2 - Lorsque le courant circule « dans la balance » montrer que le moment résultant en  $O$  des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.

3 - A l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en  $O$  des forces de Laplace. En déduire la relation liant  $B = \|\vec{B}\|$  , la somme  $m$  des masses marquées posées sur le plateau,  $i$ ,  $l$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  et le module  $g$  du champ de pesanteur  $\vec{g}$  .

4 - La sensibilité de la balance étant de  $\delta m = 0,05$  g, déterminer la plus petite valeur de  $B$  mesurable pour  $i = 10$  A,  $g = 10$  m · s $^{-2}$ ,  $l = 5$  cm et  $d_1 = d_2 = 10$  cm. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.

### FIN DE LA PARTIE III.

## II- Utilisation d'une boussole



FIGURE 2 – La Boussole

Dans cette partie on utilise une boussole constituée d'une aiguille aimantée mobile, présentant un axe de symétrie longitudinal. Cette aiguille peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son centre de masse  $G$  et perpendiculaire à l'axe de symétrie. La liaison avec l'axe est du type « pivot parfait »sans frottement. Cette aiguille aimantée se comporte comme un dipôle magnétique de moment magnétique

$\vec{M}_m$  ayant la direction de l'axe de symétrie de celle-ci.

Cette boussole est placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  permanent et localement uniforme (il est considéré comme uniforme tout le long de l'aiguille aimantée). Les forces magnétiques soumettent la boussole à un couple  $\vec{\Gamma} = \vec{M}_m \wedge \vec{B}$ . On note  $J$  le moment d'inertie de l'aiguille aimantée par rapport à l'axe de rotation. Dans un premier temps nous allons étudier les petits mouvements de l'aiguille autour de sa position d'équilibre stable, en négligeant les frottements fluides dus à l'air. Le champ magnétique et l'axe de symétrie de l'aiguille sont dans un plan horizontal. On appelle  $\alpha$  l'angle entre la direction de  $\vec{B}$  et celle de  $\vec{M}_m$ .

5 - Après avoir exprimé le couple des forces magnétiques s'exerçant sur l'aiguille en fonction des paramètres du problème que sont  $B = \|\vec{B}\|$  et  $M_m = \|\vec{M}_m\|$  et  $\alpha$ , établir l'équation différentielle dont  $\alpha$  est solution. En déduire les positions d'équilibres de l'aiguille, et indiquer sans calcul l'équilibre stable. En supposant  $\alpha \ll 1$ , donner l'expression de  $\alpha(t)$  en notant  $\alpha_0$  la valeur maximale de cet angle, en faisant apparaître le rapport  $K = \frac{M_m}{J}$  et en supposant que  $\frac{d\alpha}{dt}(t=0) = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ .

On cherche à mesurer le rapport  $K$ . Pour cela on mesure la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée placée dans un champ magnétique uniforme connu, créé par des bobines de Helmholtz. Les bobines de Helmholtz sont constituées de deux bobines plates, c'est-à-dire d'épaisseurs négligeables, identiques et équidistantes. Chacune d'entre elles comprend  $N$  spires circulaires de rayon  $R$ , parcourues par le même courant d'intensité  $I$  et dont le sens est indiqué sur la figure 3. Ces deux bobines sont distantes de  $d = R$ . L'axe  $Ox$  de révolution des spires a pour origine le point  $O$  tel que les bobines soient équidistantes de celui-ci.

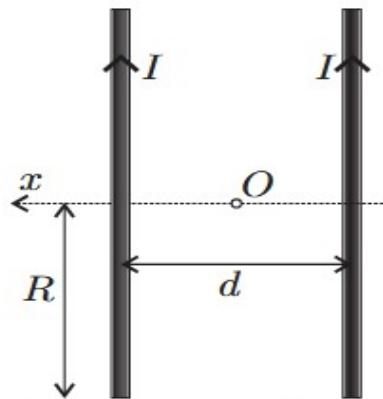
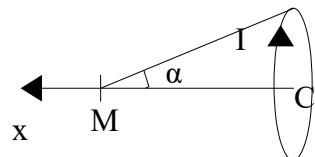


FIG. 3 – Bobines de Helmholtz

6- On considère dans un premier temps une spire circulaire de centre C, de rayon  $R$ , d'axe ( $Ox$ ) parcourue par un courant d'intensité  $I$ .



Justifier que le champ magnétique créé au point M par la spire s'écrit  $\vec{B} = B \vec{u}_x$ .

On montre que  $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha)$  avec  $\alpha$  angle non orienté défini positif.

7- Montrer qu'en un point M situé à l'abscisse  $x$ , sur l'axe  $Ox$ , le champ magnétique créé par les bobines

$$s'écrit \vec{B}(x) = \frac{\mu_0 N I}{2R} \left[ \left[ 1 + \left( \frac{x}{R} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{-3}{2}} + \left[ 1 + \left( \frac{x}{R} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{-3}{2}} \right] \vec{u}_x .$$

8- Les bobines ont un rayon R = 15 cm. On donne le développement limité suivant

$$\left[ 1 + \left( X \pm \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{-3}{2}} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[ 1 \mp \frac{6}{5} X \pm \frac{32}{25} X^3 - \frac{144}{125} X^4 + o(X^4) \right]$$

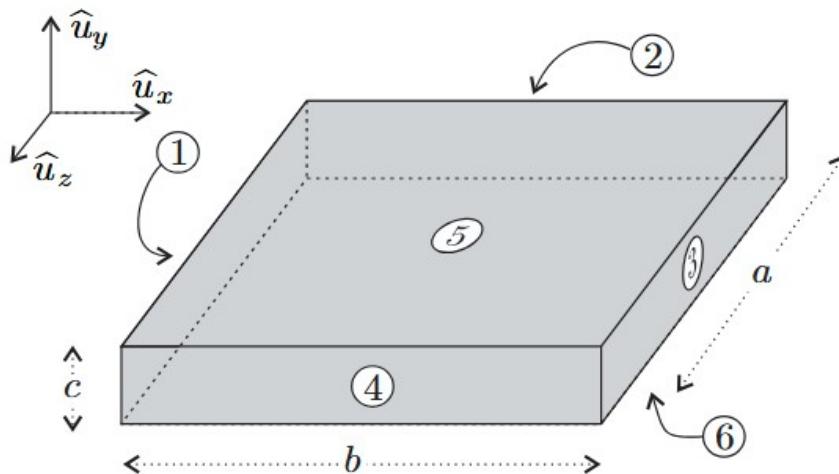
Dans quelle zone située sur l'axe Ox, peut-on considérer que la variation relative de la norme du champ par rapport à celle en O est inférieure à 2% ? Préciser la valeur numérique de B(O) sachant que N = 50 spires et I = 4 A ?

8 - La valeur mesurée de la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée est T = 0,30 s.

Déterminer l'unité et calculer la valeur numérique du rapport K pour cette boussole.

## FIN DE LA PARTIE II

### III- Utilisation d'une sonde à effet Hall



**FIGURE 4 – Plaquette de semi-conducteur**

L'élément principal d'une sonde à effet Hall est une plaquette constituée d'un semi-conducteur, dopé N, dans laquelle les porteurs de charges libres sont des électrons, dont la charge est  $q = -e = -1,6 \times 10^{-19}$  C. La densité volumique de ces électrons dans cette plaquette est  $n = 3,30 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ .

Cette plaquette possède la forme d'un parallélépipède, dont les six faces sont numérotées conformément à la figure 4, ses dimensions sont  $a = 3$  mm,  $b = 6$  mm et  $c = 0,2$  mm. Les faces 1 et 3 sont reliées aux bornes d'une source de courant idéale, délivrant un courant d'intensité  $I_0 = 10$  mA constant.

En régime permanent, on peut considérer que les lignes de courant sont rectilignes et parallèles, le vecteur densité volumique de courant est uniforme et s'écrit  $\vec{j} = j \hat{u}_x$ .

9- Etablir l'expression de la vitesse  $\vec{v}$  des porteurs de charge et calculer sa norme.

La plaquette est placée dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique considéré comme constant, tel que  $\vec{B} = B \hat{u}_y$  avec  $B > 0$ .

10- Après avoir exprimé la force magnétique s'exerçant sur une charge mobile, justifier que des densités surfaciques de charge apparaissent sur les faces 2 et 4. On précisera les signes de ces densités.

Ces densités surfaciques de charges créent un champ électrique  $\vec{E}_h = E_h \hat{u}_z$  au sein de la plaquette. En régime permanent, la vitesse des porteurs de charge reste inchangée.

13 - En appliquant le principe fondamental de la mécanique à un porteur de charge en projection sur  $\hat{u}_z$ , déterminer l'expression de  $E_h$ . Montrer qu'il apparaît une différence de potentiel  $u_h = V_4 - V_2$  entre les faces 4 et 2. Celle-ci est appelée tension de Hall, on l'écrira sous la forme  $u_h = \gamma B$  en précisant l'expression et la valeur numérique de la constante  $\gamma$ .

La création de la source de courant délivrant l'intensité  $I_0$  nécessite un circuit électronique de commande. Les tensions de Hall étant souvent très faibles, on doit les amplifier à l'aide d'un circuit électronique de mesure. Le circuit de commande comprend un circuit intégré, nommé régulateur de tension, ayant trois broches, notées : e (entrée), s (sortie) et c (commun). La tension  $u = V_s - V_c$  est constante et sa valeur est fixée à  $u = 5$  V. La tension d'alimentation est  $V_{cc} = 9V$ . L'intensité  $I_c$  du courant entrant en c, est contrôlée à la valeur  $I_c = 10$  nA. Le dipôle AM ainsi réalisé est représenté sur la figure 5.

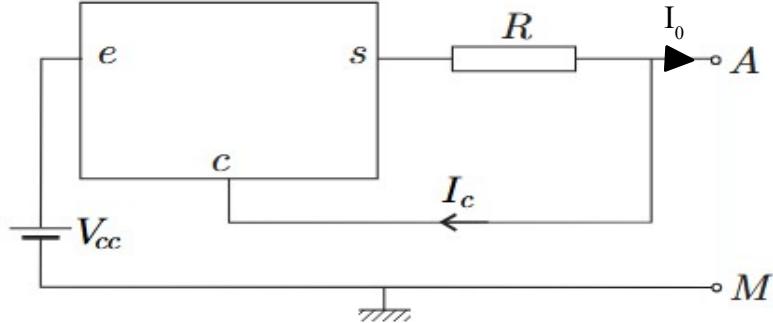
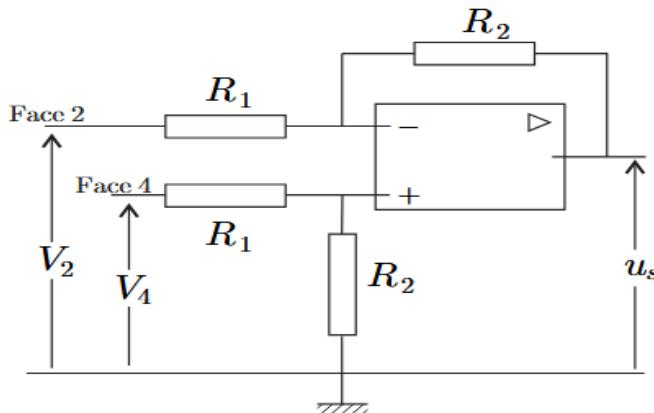


FIGURE 5 – Source de courant idéale

12- Pour quelle valeur de la résistance R le dipôle AM se comporte-t-il comme une source de courant idéale, délivrant un courant  $I_0 = 10$  mA ?

Le circuit de mesure en utilise un amplificateur différentiel représenté sur la ci-dessous , qui utilise un ALI, supposé idéal et en fonctionnement linéaire.



13-Etablir la relation entre  $u_s$  et  $u_h = V_4 - V_2$ . A quelle condition sur  $R_2$  et  $R_1$  la tension de Hall est elle amplifiée ?

14- Etablir l'expression de la résistance d'entrée sur la face 4. Quel problème pose le résultat obtenu ?

15- Afin de pallier ce problème, on insère des montages suiveur entre les faces 2 et 4 et le montage précédent . Justifier que ces suiveurs permettent de résoudre le problème énoncé dans la question 14 .

16- Représenter le montage complet incluant la plaquette semi-conductrice et l'électronique qui permet la mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

17- On choisit  $R_1 = 100 \Omega$  et  $R_2 = 1 k\Omega$ . On obtient alors  $u_s = 20,0$  mV, quelle est la valeur de cette composante ?

On veut maintenant vérifier l'influence du champ magnétique propre  $\vec{B}_0$  créé par le courant  $I_0$ . Pour cela on adopte un modèle simplifié dans lequel la plaquette est supposée infiniment longue dans les directions  $\hat{u}_x$  et  $\hat{u}_z$  uniquement. Le semi-conducteur est supposé avoir la même perméabilité  $\mu_0$  que le vide.

18- Déterminer, dans ce modèle, la direction de  $\vec{B}_0$  ainsi que les variables spatiales du problème dont ce champ ne dépend pas .

A l'intérieur de la plaquette où la variable  $y \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$ , déterminer l'expression de  $\vec{B}_0$  à partir d'une équation locale puis à partir du théorème d'Ampère (vous aurez soin de bien justifier vos calculs). Calculer la valeur maximale de la norme de ce champ. Dans la mesure du champ terrestre, pouvait-on négliger l'influence de  $\vec{B}_0$  ?

### FIN DE LA PARTIE III

#### **IV- Utilisation d'une magnétorésistance**

On considère un conducteur électrique se présentant sous la forme d'une couronne cylindrique d'axe Oz, de hauteur  $h$ , délimitée par un cylindre intérieur de rayon  $r_1$  et par un cylindre extérieur de rayon  $r_2$ . A l'aide d'une source de tension on impose les potentiels  $V(r_1) = V_1$  et  $V(r_2) = V_2$ . On se place en régime permanent et on néglige les effets de bord, ce qui revient à supposer que le comportement de cette couronne est le même que si elle était infiniment haute.

L'existence de deux équipotentielles cylindriques permet d'émettre l'hypothèse que le potentiel ne dépend que de  $r$ , ainsi  $V = V(r)$ ,  $\Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r \frac{dV}{dr})$  et  $\vec{\text{grad}}(V(r)) = \frac{dV}{dr} \hat{u}_r$

19- Le conducteur est globalement non chargé, vérifier que l'hypothèse  $V = V(r)$  est la seule possible. Déterminer le potentiel électrique en un point M de ce conducteur. En déduire l'intensité E du champ électrique  $\vec{E}$  en ce même point en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r$ .

La couronne cylindrique est placée dans un champ magnétique  $\vec{B} = B \hat{u}_z$  avec  $B > 0$ . Le conducteur contient  $n$  électrons libres par  $m^3$ . On considère de plus le modèle de Drude dans lequel chaque électron de vitesse  $\vec{v}$  est soumis, en plus des forces électromagnétiques, à une force de frottement s'exprimant sous la forme  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$  avec  $\lambda > 0$ .

20- Pour chaque électron, établir, en régime permanent, la relation entre  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  paramétrée par  $\lambda$  et la charge élémentaire  $e$ . En déduire l'expression, dans la base cylindrique  $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z)$ , des coordonnées de  $\vec{v}$  en fonction de  $e$ ,  $\lambda$ ,  $E$  et  $B$  puis celles du vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$ .

21- Exprimer l'intensité du courant électrique traversant une surface équipotentielle de rayon  $r$ . En déduire la résistance électrique  $R$  de la couronne, en fonction de  $e$ ,  $n$ ,  $\lambda$ ,  $B$ ,  $h$ ,  $r_1$  et  $r_2$ .

On note  $R_0$  la résistance en l'absence de champ magnétique. Exprimer l'écart relatif  $\epsilon = \frac{R - R_0}{R_0}$  en fonction de  $e$ ,  $B$  et  $\lambda$ . Calculer la valeur numérique de  $R_0$  ainsi que celle de  $\epsilon$  pour  $B = 1,0 \text{ mT}$ ,  $r_1 = 1,0 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 3,0 \text{ mm}$ ,  $h = 1,0 \text{ mm}$ ,  $n = 1,1 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  et  $\lambda = 1,8 \times 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Commenter l'utilisation du phénomène pour la mesure de champs magnétiques.

### FIN DE LA PARTIE IV

### FIN DE L'EPREUVE