

Ex: décharge d'une bête chargée dans l'air. ①

1- Les lignes de courant sont radiales.

Décharge isotrope $\Rightarrow$ invariance par rotation autour de O (centre de la sphère).

$$\vec{j}(M, t) = j(M, t) \vec{ur}$$

$$\underline{\vec{E}(M, t) = E(M, t) \vec{ur}}$$



les plans $(M; \vec{ur}, \vec{u\theta})$ sont plans de symétrie de la distribution de courant et de $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \vec{B} \perp \text{à ces 2 plans} \Rightarrow \underline{\vec{B} = 0}$$

2- $\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot \vec{n}$ = caractérise la puissance rayonnée.

$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ densité volumique d'énergie e.m.

$P_J = \vec{j} \cdot \vec{E}$ = puissance volumique dissipée par effet Joule.

Comme $\vec{B} = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) = - \vec{j} \cdot \vec{E} = - \gamma E^2$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E \frac{\partial E}{\partial t} = - \gamma E^2$$

②

$$\frac{\partial E(r,t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} E(r,t) = 0$$

$$E(r,t) = E(r,t=0) e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$$

Calcul de $E(r,t=0)$ avec la Th. de Gauss appliquée à une sphère de centre O, de rayon $r > R$.

$$\oint \vec{E}(r,t=0) \cdot d\vec{r} = E(r,t=0) 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r,t=0) = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(r,t) = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t} \vec{u}_r$$

$t \rightarrow \infty$
 $\vec{E} = \vec{0}$

3 - Th. de Gauss appliquée à la sphère de rayon $r = R^+$

$$E(R,t) \times 4\pi R^2 = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$$

$t \rightarrow \infty$ $Q \rightarrow 0$

$$4 - \textcircled{1} \rho_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \gamma \frac{Q_0}{(4\pi \epsilon_0 r^2)} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$$

et dans tout l'espace :

$$\rho_{div}(t) = \frac{\gamma Q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(\int_R^\infty \frac{1}{u^4} 4\pi u^2 du \right) e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$$

$$\rho_{div}(t) = \frac{\gamma Q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(-\frac{1}{u} \right)_R^\infty e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$$

$$P_{\text{dis}}(t) = \frac{\gamma Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2 R} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t} = \frac{dE_{\text{dis}}}{dt} \quad (3)$$

L'énergie totale dissipée en $t=0$ et $t=\infty$

$$E_{\text{dis}} = \int_{t=0}^{\infty} P_{\text{dis}}(t) dt = \frac{\gamma Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2 R} \times \frac{\epsilon_0}{\gamma} \left(-e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t} \right)_0^{\infty}$$

$$E_{\text{dis}} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

② 2^{ème} méthode : déterminer l'énergie em stockée à t dans l'espace.

$$U_{\text{em}}(t) = \int_{r=R}^{\infty} \frac{\epsilon_0 E^2(r, t)}{2} \times 4\pi r^2 dr$$

$$U_{\text{em}}(t) = \frac{Q_0^2 e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}}{8\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$$

$$E_{\text{dis}} = U_{\text{em}}(0) - U_{\text{em}}(t \rightarrow \infty) = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$\left(\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = - \oint_V (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV = - P_{\text{dis}}(t) \right)$$

$$dU_{\text{em}} = - P_{\text{dis}}(t) dt$$

$$U_{\text{em}}(t=\infty) - U_{\text{em}}(t=0) = - \int_0^{\infty} P_{\text{dis}}(t) dt$$