

DS SCIENCES PHYSIQUES N°6 (Niv 1)

La plus grande importance sera apportée au soin de la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée. Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte.

Un résultat numérique sans unité ne rapporte aucun point. Les applications numériques doivent être posées sur la copie.

Les résultats doivent être encadrés.

Vos copies doivent être numérotées sous la forme 1/4, 2/4, 3/4

En cas de non respect de ces consignes, un malus sera attribué à la copie.

CHIMIE :

Partie A - Batterie d'accumulateurs au plomb

Une batterie au plomb est constituée d'un certain nombre d'éléments accumulateurs logés dans un bac en plastique fermé par un couvercle scellé (figure 1). Chacun de ces accumulateurs est composé d'une électrode positive et d'une électrode négative, baignant toutes deux dans la même solution aqueuse d'acide sulfurique $\text{H}_2\text{SO}_{4(\text{aq})}$ (à la concentration c) et de sulfate de plomb II (Pb^{2+} , SO_4^{2-}) (à la concentration c'). Les électrodes sont formées d'une grille (chimiquement inerte mais conduisant l'électricité) dont les alvéoles sont remplies d'une pâte poreuse ; cette pâte est formée de peroxyde de plomb $\text{PbO}_{2(\text{s})}$ pour une des électrodes et de plomb métallique $\text{Pb}_{(\text{s})}$ pour l'autre. Les espèces en solution dans l'eau sont donc seulement H^+ (qu'on pourra choisir de noter H_3O^+), Pb^{2+} et les ions HSO_4^- issus de l'acide sulfurique et SO_4^{2-} ; Pb et PbO_2 sont des solides.



FIGURE 1 – Une batterie 12 V, 65 A·h fabriquée au Royaume-Uni par Yuasa[©]

1- Laquelle des deux électrodes est l'électrode positive ?

Justifier et préciser, pour chacune des deux électrodes, l'équation-bilan de la réaction à l'électrode en fonctionnement spontané (c'est-à-dire en régime de décharge de la batterie).

2- Établir l'expression de la force électro-motrice E d'un tel accumulateur (à 25°C) en fonction des données et des seules concentrations $[\text{H}^+]$ (ou bien $[\text{H}_3\text{O}^+]$) et $[\text{Pb}^{2+}]$.

En supposant pour une batterie la concentration de sulfate de plomb II $c_0 = [\text{Pb}^{2+}] = 1,0 \text{ mol.L}^{-1}$, calculer le pH de la solution nécessaire pour obtenir $E = 1,9\text{V}$; commenter.

En toute rigueur l'étude de l'accumulateur devrait être complétée à cause de la formation d'un précipité solide de sulfate de plomb PbSO_4 selon le bilan $\text{Pb}^{2+} + \text{SO}_4^{2-} = \text{PbSO}_4$. La prise en compte de cette réaction se traduit par une modification de la force électromotrice E des accumulateurs au plomb par rapport au calcul précédent, qui devient de l'ordre de 2,0V. À part cette modification numérique nous ne tiendrons pas compte du précipité de sulfate de plomb dans ce qui suit.

Les batteries d'accumulateurs automobiles ont une force électromotrice E_t de l'ordre de 12V; la batterie étudiée ici est caractérisée par sa capacité $Q_t = 65 \text{ A} \cdot \text{h}$ (on rappelle que la capacité électrique d'une pile est la valeur de la charge électrique totale qui la traverse avant que la réaction électrochimique de décharge s'arrête et que l'A.h est une unité de charge ; 1 A.h correspond à la charge transférée lorsque la batterie fournit 1A pendant 1h).

3- Combien d'accumulateurs faut-il associer pour réaliser une batterie automobile ?

Représenter cette association sur un schéma.

Quelle est la capacité Q de chacun des accumulateurs ?

En déduire les quantités de matière totales n_{Pb} et n_{PbO_2} contenues dans les grilles de l'ensemble des électrodes contenues dans la batterie au complet (on admettra que ces espèces Pb et PbO_2 sont les seuls réactifs limitants).

Données :

Constante de Faraday $F = e N_A = 96500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$

Constante de Nernst à 25 °C : $\frac{RT}{F} \ln 10 \approx 0,06 \text{ V}$

Quelques potentiels rédox standard à 25°C :

Couple oxydant/réducteur	$\text{Pb}^{2+} / \text{Pb}$	$\text{H}_2\text{O} / \text{H}_2$	$\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$	$\text{PbO}_2 / \text{Pb}^{2+}$
Potentiel standard E° (V)	-0,13	0	1,23	1,69

Partie B : Le carbure de zirconium

Il existe trois grandes classes de matériaux : les métaux et leurs alliages, les polymères organiques et les céramiques. Ces dernières sont des matériaux minéraux non métalliques qui peuvent être catégorisées en traditionnelles ou techniques. Les céramiques techniques et plus particulièrement les céramiques non oxydes telles que le nitrure de bore (BN), le carbure ou nitrure de silicium (SiC ou Si_3N_4), ou le carbure de zirconium (ZrC) présentent des propriétés physico-chimiques intéressantes pour des applications hautes performances .

Le carbure de zirconium est une céramique ultraréfractaire, ultradure de formule chimique $\text{ZrC}_{(s)}$. Il peut être préparé en utilisant une « voie poudre » à haute température par réaction entre le zirconium $\text{Zr}_{(s)}$ et le carbone $\text{C}_{(s)}$ via une synthèse autopropagée (self-propagating high-temperature synthesis), mais également par réduction, par le carbone, de la zircone, ou dioxyde de zirconium $\text{ZrO}_{2(s)}$ (Schéma 1) .

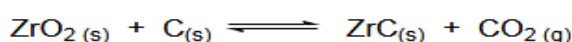
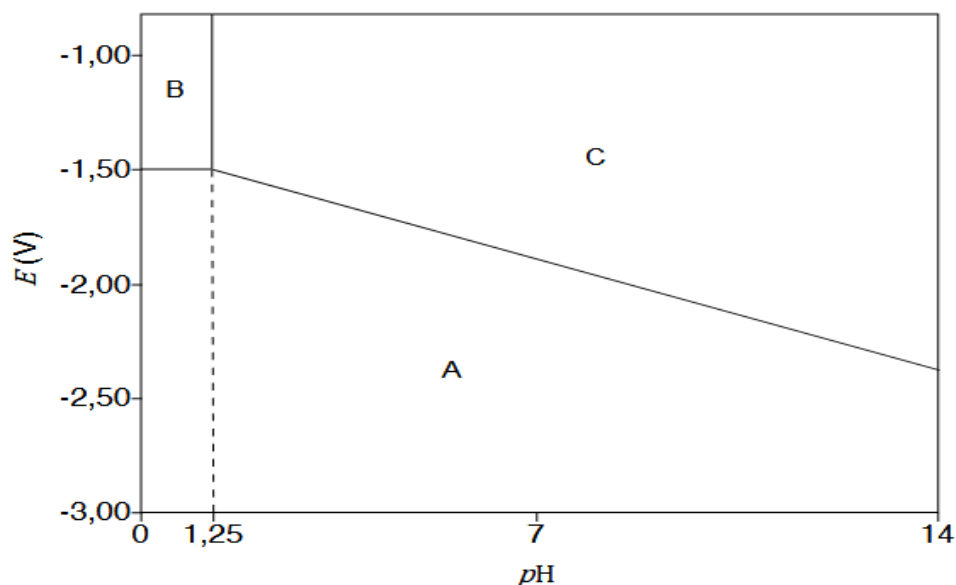


Schéma 1. Voies de synthèse du carbure de zirconium.

Le diagramme potentiel-pH du zirconium a été déterminé en se limitant aux quatre espèces $\text{Zr}_{(s)}$, $\text{ZrO}_{2(s)}$, $\text{Zr}^{4+}_{(aq)}$ et $\text{HZrO}_3^-_{(aq)}$ (Figure 1) .



Le diagramme a été tracé à 298 K et sous 1 bar en solution aqueuse, en prenant les concentrations des espèces en solution égales à c_0 .

Figure 1. Diagramme E-pH du zirconium.

1- Indiquer le nombre d'oxydation du zirconium dans chacune des quatre espèces $\text{Zr}_{(s)}$, $\text{ZrO}_{2(s)}$, $\text{Zr}^{4+}_{(aq)}$ et $\text{HZrO}_3^-_{(aq)}$ (l'oxygène et l'hydrogène sont dans leur état d'oxydation classique dans ces espèces).

2- Attribuer, en le justifiant, les différents domaines de prédominance ou d'existence (numérotés de A à C, Figure 1) parmi les différentes espèces considérées. L'espèce $\text{HZrO}_3^-_{(aq)}$ n'est pas présente sur le diagramme ce qui sera justifié dans la suite du problème .

3- Quelle concentration c_0 de tracé a été utilisée pour établir ce diagramme ?

La droite de la frontière entre les domaines A et C a pour équation $E = a + b \text{ pH}$.

4- Par le calcul (et non par lecture sur la Figure 1), déterminer la valeur du coefficient b.

5- Quel serait le pH associé à la frontière verticale entre les espèces $\text{HZrO}_3^-_{(aq)}$ et $\text{ZrO}_{2(s)}$. Conclure sur l'absence d'une des espèces de ce diagramme E-pH .

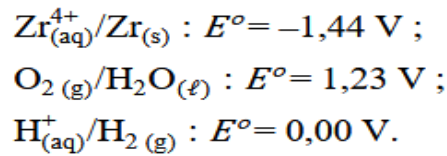
6- Déterminer, à l'aide de la méthode thermodynamique (combinaisons d'équation et d'enthalpies libres standards) le potentiel standard du couple $\text{ZrO}_{2(s)}/\text{Zr}_{(s)}$.

7- Donner les relations $E = f(\text{pH})$ des couples de l'eau, après avoir indiqué les demi-équations redox correspondantes (les pressions des gaz seront supposés égales à la pression standard P°) .

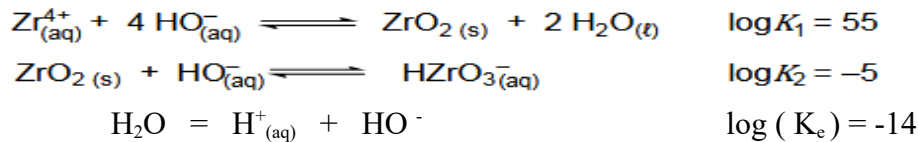
8- Le zirconium $\text{Zr}_{(s)}$ est-il stable en présence d'eau ? Justifier, et écrire le cas échéant toutes les équations de réaction possibles .

Données :

Potentels standards d'oxydoréduction à pH = 0 et à 25°C :



Constantes d'équilibre à 25 °C :



PHYSIQUE (Niv 1) :

Exercice : électronique numérique .

On désire numériser le signal analogique suivant : $e(t) = S_0 \left[\cos(10\pi t) + \frac{1}{3} \cos(30\pi t) - \frac{1}{5} \sin(50\pi t) \right]$

- 1- Quelle doit-être la valeur minimale $F_{\min}$ de la fréquence d'échantillonnage pour que le signal soit correctement restitué ?
- 2- Pour numériser ce signal, on choisit une fréquence d'échantillonnage $F_e = 80 \text{ Hz}$. Représenter le spectre du signal numérisé dans l'intervalle $[0, 120 \text{ Hz}]$.
3. Le signal électrique subit un parasitage par un signal de fréquence 60 Hz. Quelle modification du spectre cela provoque-t-il? Pourquoi est-ce problématique?
4. Quel type de filtrage doit-on faire subir au signal électrique pour éviter cet inconvénient? Précisez ses caractéristiques et le nom d'un tel filtre .
- 5- On échantillonne le signal par niveaux de 0,63 V . Combien de bits sont nécessaires pour coder chaque valeur numérique si $-5 \text{ V} \leq s(t) \leq 5 \text{ V}$?
- 6- Quelle doit-être la taille minimale de la mémoire nécessaire à l'enregistrement de deux minutes du signal ?
- 7- On désire filtrer le signal à l'aide d'un filtre numérique passe-bas du premier ordre par la méthode d'Euler . On note $\underline{e}$ et $\underline{s}$ les grandeurs complexes associées au signal d'entrée et au signal de sortie . On raisonne en régime harmonique . Rappeler la forme complexe de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre passe-bas sachant que sa constante de temps caractéristique est notée τ et que le gain en basse fréquence vaut 1 .
En déduire l'équation différentielle qui lie entrée et sortie pour un régime d'évolution temporelle quelconque .
Ecrire le schéma d'Euler explicite associé à l'équation différentielle de ce filtre passe-bas, on appelle T_e la période d'échantillonnage et on note $e[n]$ et $s[n]$ les valeurs des échantillons de $e(t)$ et $s(t)$ aux instants nT_e

Problème :

PARTIE A : Kami no Sabaki – Électrodynamique classique

One Piece est une série de mangas Shōnen créée par Eiichirō Oda. L'histoire suit les aventures de Monkey D. Luffy, un garçon dont le corps a acquis les propriétés du caoutchouc après avoir mangé par inadvertance un fruit du démon.

Avec son équipage de pirates, appelé l'équipage au Chapeau de paille, Luffy explore Grand Line à la recherche du trésor ultime connu sous le nom de One Piece afin de devenir le prochain roi des pirates.



Enel (Eneru en VO) est l'antagoniste principal de l'Arc Skypiea. Son fruit du démon, le goro goro no mi, lui permet de produire de la foudre et du courant électrique en maîtrisant la formation de particules chargées....

I - Champs électromagnétiques dans un condensateur

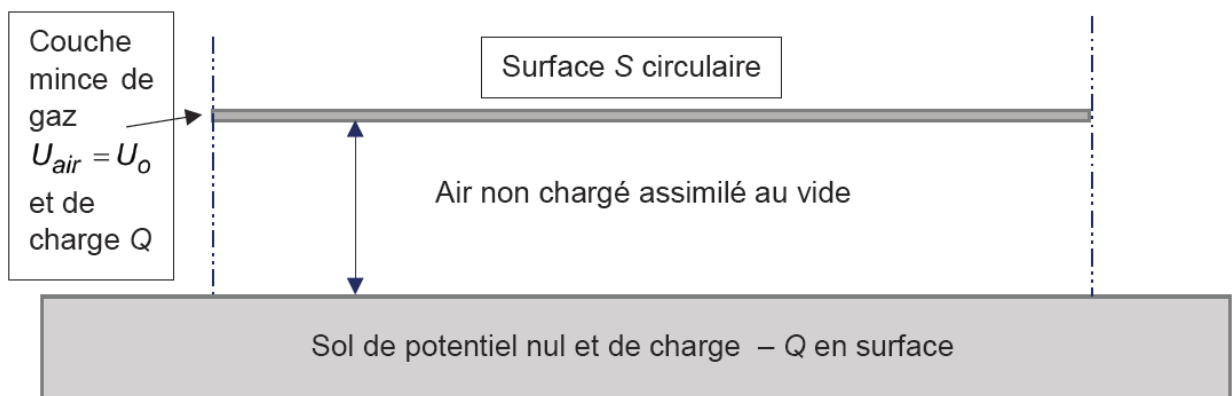


Figure 3 - Condensateur créé par Enel

Les échelles ne sont pas respectées par souci de représentation.

Le pouvoir d'*Enel* lui permet d'imposer un potentiel à un volume d'air extrêmement fin au-dessus de lui. On s'intéresse ici au condensateur formé par cette surface d'air circulaire et le sol, localement plan (**figure 3**). Dans cette modélisation, on pourra considérer deux disques (plans) parallèles de surfaces S distants de d avec $d \ll \sqrt{S}$ de potentiels électriques respectifs $U_{sol}=0$ et U_{air} (U_{air} potentiel électrique de la couche d'air chargé). On négligera les effets de bord. On appellera (Oz) l'axe vertical ascendant dont l'origine est prise au sol et $\vec{u}_z$ son vecteur unitaire.

On assimile l'air non chargé entre ces plaques au vide de permittivité $\epsilon_0=8,85.10^{-12} F.m^{-1}$.

On se place ici en régime statique, $U_{air}=U_0$ constante positive et on note $\sigma_{air}=\sigma_0$ la densité surfacique des charges électriques de la surface d'air chargée.

- 1- Justifier que le champ électrique est de direction : $\vec{E} = E \vec{u}_z$. Déterminer le champ électrique créé dans l'espace $0 < z < d$ en fonction de σ_0 et de ϵ_0 .
 - 2- En déduire la différence de potentiel U_0 en fonction de σ_0 , ϵ_0 et de d .
 - 3- Calculer E et σ_0 pour $d = 5,0 \text{ m}$ et $U_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ V}$.
 - 4- Doit-on craindre une telle tension ? On donne la valeur du champ disruptif de l'air dans les conditions d'étude : $E_{\text{disruptif}}(\text{air}) = 3,6 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$.
- Le condensateur est soumis désormais à une tension alternative de basse fréquence f , de telle sorte que $U_{\text{air}} = U_0 \cos(\omega t)$. On travaillera en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) . On admet qu'à cette fréquence, la relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique est la même qu'en régime statique (on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires ARQS) .
- 5- Écrire $\vec{E}$ sous la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ avec E_0 à préciser en fonction de U_0 et des autres données de l'énoncé.
 - 6- Rappeler les équations de Maxwell du champ électromagnétique en l'absence de charges et courants .
 - 7- Justifier l'existence d'un champ magnétique $\vec{B}$ et montrer que $\vec{B}(M, t) = B(r, z, t) \vec{e}_\theta$.
 - 8- Justifier que, si l'on reste dans l'espace entre les armatures, la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé orienté s'écrit : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}$, avec c et $\Phi_{\vec{E}}$ à préciser.
 - 9- En utilisant la relation de la question précédente sur un contour que vous préciserez, déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ régnant entre les armatures du condensateur .
 - 10- Déterminer les densités volumiques moyennes d'énergie électrique et magnétique . En déduire, que dans le cadre de l'ARQS, on peut négliger la contribution de l'énergie magnétique .
 - 11- En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer l'énergie totale stockée dans l'espace inter-armatures et en déduire l'expression de la capacité du condensateur plan .

II- Écrantage dans un plasma thermique

En fait, la création d'un tel potentiel électrique augmente drastiquement la température, ionisant au passage l'atmosphère. L'air ne sera plus assimilé à du vide mais à un plasma, un milieu globalement neutre électriquement, partiellement ou totalement ionisé, contenant en moyenne et par unité de volume, n_e électrons libres de masse m_e et de charge $q_e = -e$ et n_i ions X^+ , de masse m_i et n_0 atomes X de masse m_0 . L'atmosphère est à l'équilibre thermodynamique à une *haute* température T .

Intéressons-nous à l'environnement d'un ion X^+ particulier dont la position sera prise pour l'origine O . Notons respectivement n_1 et n_2 , les densités volumiques (en m^{-3}) d'ions et d'électrons en un point M situé à une distance r de l'origine. **On se place dans le cadre de l'électrostatique.**

- 12- On considère, dans cette question uniquement, que l'ion X^+ , de charge totale e , est seul et placé au point O . On le modélise par une sphère de rayon R_c dans laquelle la charge e est uniformément répartie en volume .
 - a- Déterminer la densité volumique de charge ρ_c portée par la sphère .
 - b- Déterminer, en se plaçant en coordonnées sphériques de centre O , la géométrie du champ électrostatique créé par cette distribution de charges .

c- Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par cette distribution de charges .

d- Déterminer le potentiel créé par cette distribution de charge en un point M situé à une distance $r > R_c$.

On donne l'expression du gradient d'une fonction $f(r, \theta, \phi)$ en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, \phi, t) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi$$

Dans la suite de cette partie le cation X^+ sera considéré comme ponctuel et confondu avec le point O

13- Rappeler l'énergie potentielle d'une charge e placée en un point du plasma tel que le potentiel électrique en ce point soit égal à U . On suppose que ce potentiel ne dépend que de r : $U = U(r)$.

A la température T , les densités n_1 et n_2 ont pour expression :

$$n_1 = n_e \exp\left(\frac{-eU}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_2 = n_e \exp\left(\frac{eU}{k_B T}\right)$$

où k_B est la constante de Boltzmann .

Justifier qu'à " très haute température ", n_1 et n_2 sont des fonctions affines de U dont on donnera les expressions . À quelle inégalité correspond la notion de " haute température " ?

En déduire l'expression de la densité volumique de charge $\rho(r)$ en un point situé à une distance r de O .

On se place dans ce cadre dans toute la suite .

14- Comment s'écrit, dans ce milieu, l'équation de Poisson ? En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit $U(r)$.

15- En posant $Z(r) = r U(r)$, montrer que la fonction $Z(r)$ vérifie l'équation : $\frac{d^2 Z}{dr^2} - \frac{Z}{\lambda_D^2} = 0$

avec λ_D une constante à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

16- Résoudre cette équation et montrer que le potentiel électrique s'écrit :

$$\text{pour } r \neq 0, \quad U(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(\frac{-r}{\lambda_D}\right) .$$

Interpréter ce que représente λ_D . Commenter .

17- En déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$ ainsi que la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r (ne pas oublier l'ion placé en O) .

$$\text{On donne } \int_0^r u \exp\left(\frac{-u}{\lambda_D}\right) du = \lambda_D^2 \left[1 - \exp\left(\frac{-r}{\lambda_D}\right) \left(\frac{r}{\lambda_D} + 1 \right) \right] .$$

III- Décharge du condensateur de plasma

On (re)considère deux disques (plans) parallèles de surface S distants de d avec $d \ll \sqrt{S}$ de charges surfaciques électriques respectives $\sigma_{air} = \sigma_0$ (pour la surface d'air chargée) et $\sigma_{sol} = -\sigma_0$ (au sol). On négligera les effets de bord. On appellera (Oz) l'axe vertical ascendant dont l'origine est prise au sol et $\vec{u}_z$ son vecteur unitaire.

À l'instant initial ($t = 0$) , suite à l'élévation brutale de température, l'air contenu entre ces deux plans devient un conducteur ohmique, caractérisé par sa conductivité électrique γ . La couche d'air formant le plan situé à l'altitude d se décharge ce qui génère un courant dirigé vers le sol . L'air, entre les plaques, est supposé rester localement neutre.

L'expression du champ électrique $\vec{E}$ à l'instant t est identique à celle de la question I-1- à condition de remplacer σ_0 par $\sigma_{air}(t)$.

18- Quelle est l'unité de γ ?

19- Déterminer la densité volumique de courant $\vec{j}$ en fonction de $\sigma_{air}(t)$ et des données de l'énoncé.

20- Montrer que l'équation différentielle relative à la densité surfacique de charge d'air s'écrit :

$$\frac{d\sigma_{air}}{dt} + \frac{\sigma_{air}}{\tau} = 0 \quad \text{avec } \tau \text{ une constante de temps à exprimer en fonction des données de l'énoncé.}$$

20- Représenter $\sigma_{air}(t)$ en fonction du temps en faisant apparaître σ_0 et τ .

Grâce au fulguro-fruit, Enel peut rendre l'air conducteur et faire propager un courant électrique d'intensité gigantesque, le rendant tout puissant face à tout élément conducteur...

Données :

Analyse vectorielle

- $\text{div}(\vec{\text{grad}}) = \Delta$

- Coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Partie B : génération de champs magnétiques .

On se place, dans toute cette partie, en régime statique .

On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) , on désigne par $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ les vecteurs de base liés à un point M .

I- Champ créé par fil infini :

On considère fil infini d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité I_0 .

- 1- Déterminer la géométrie du champ magnétostatique créé par ce conducteur .
- 2- Déterminer le champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par ce conducteur .
- 3- Déterminer la valeur de I_0 permettant de générer un champ d'intensité 10 mT à 1 cm du fil . Quel problème peut se poser ?

On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

II- Fil creux :

Pour palier au problème précédent, on considère un conducteur cylindrique creux d'axe (Oz), de longueur H, de rayon intérieur $R \ll H$ et d'épaisseur e , parcouru par des courants axiaux d'intensité totale I_0 uniformément répartis en volume entre les deux cylindres coaxiaux de rayon R et $R+e$. La cavité peut-être parcourue par un fluide caloporteur permettant d'améliorer l'évacuation de l'énergie dissipée par effet Joule .

- 1- Déterminer l'expression du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ à l'intérieur du conducteur ($R < r < R+e$) .
- 2- Déterminer à l'aide du théorème d'Ampère puis à l'aide de l'équation locale correspondante le champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par ce conducteur . On exprimera celui-ci en fonction de l'intensité I_0 .

On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques .

$$r \vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

III- Solénoïde épais :

On considère un solénoïde «épais» (épaisseur $e = R_2 - R_1$) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur $L \gg R_2$) de même axe Oz. Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté $a = 1,0 \text{ mm}$, enroulées sur un cylindre de longueur $L = 4,0 \text{ m}$, depuis un rayon $R_1 = 20 \text{ cm}$ jusqu'à un rayon $R_2 = 25 \text{ cm}$. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu I_0 uniformément réparti, orienté dans le sens direct autour de Oz. La situation est schématisée sur la figure ci-dessous. Les sections carrées sont dans les plans $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ c'est-à-dire en positionnement radial.

On modélise cette distribution de courant par une distribution volumique uniforme de courants orthoradiaux de densité $\vec{j} = j \vec{e}_\theta$ avec $j = \frac{I_0}{a^2}$ comprise entre les cylindres de rayons R_1 et R_2 .

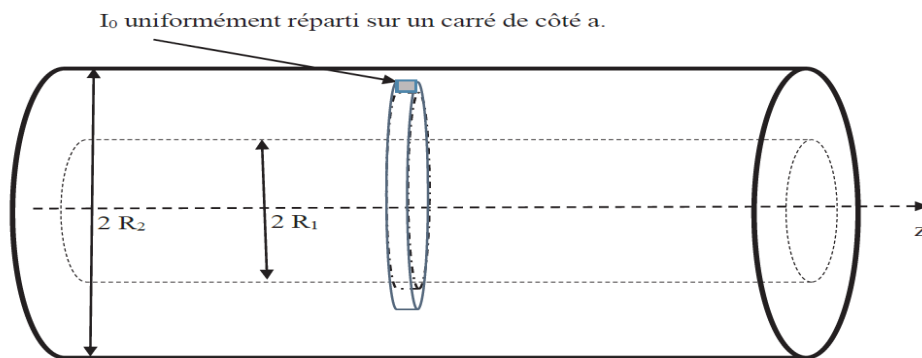


Figure 6 – Solénoïde épais

Établir, à l'aide du théorème d'Ampère, l'expression du champ magnétique créé par cette distribution de courant en admettant que celui-ci est nul pour $r > R_2$ où r est la distance d'un point M à l'axe . .