(1)

DM 14 :

Partie I : onde dans le vide :

1 – $\underline{\vec{E}} = \vec{E_0}\, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

$\underline{\vec{B}} = \vec{B_0}\, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

Dans le vide, en l'absence de charges et courants

$* \operatorname{div} \underline{\vec{E}} = -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$: $\vec{E}$ est transverse

$* \operatorname{div} \underline{\vec{B}} = -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}$: $\vec{B}$ est transverse

$* \ \vec{\operatorname{rot}}\, \underline{\vec{E}} = -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -j\omega\underline{\vec{B}}$

$\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$

$* \ \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\,\underline{\vec{E}}) = \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\underline{\vec{E}}) - \vec{\Delta}\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\operatorname{rot}}\,\underline{\vec{B}})$

$= -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}\right)$

D'où $\vec{E}$ vérifie l'équation d'ordre 2 :

$\vec{\Delta}\underline{\vec{E}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$

2 – $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{j(\omega t - ax - by)}\,\vec{e_z} = \underline{E}\,\vec{e_z}$

Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon l'axe $\vec{e_z}$ se propageant dans la direction $\vec{u} = \dfrac{a\vec{e_x} + b\vec{e_y}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3 – En réinjectant l'expression de $\vec{E}$ dans l'équation d'onde, on a :

$\left(\dfrac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2}\right)\vec{e_z} - \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}\right)\vec{e_z} = \vec{0}$

(2)

$-(a^2+b^2) + \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0$

$\boxed{a^2+b^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}}$ relation de dispersion.

4 – a, b sont les coordonnées selon x et y du vecteur d'onde.

$\boxed{\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

$\boxed{\tan\theta = \dfrac{b}{a}}$

5 – $\underline{\vec{B}} = \dfrac{1}{\omega}\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\\underline{E}\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\omega}\begin{pmatrix}b\underline{E}\\-a\underline{E}\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{\underline{\vec{B}} = \dfrac{E_0}{\omega}(b\vec{e_x} - a\vec{e_y})\,e^{j(\omega t - ax - by)}}$

6 – ⚠ Notation réelle

$\vec{E} = E_0\cos(\omega t - ax - by)\,\vec{e_z}$

$\vec{B} = \dfrac{E_0}{\omega}(b\vec{e_x} - a\vec{e_y})\cos(\omega t - ax - by)$

$\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}0\\0\\E\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}-EB_y\\EB_x\\0\end{pmatrix}$

$\vec{\Pi} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0\omega}(a\vec{e_x} + b\vec{e_y})\cos^2(\omega t - ax - by)$

$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega}(a\vec{e_x} + b\vec{e_y})}$ col. de même sens à $\vec{k}$

7 – $w_{em} = \varepsilon_0\dfrac{\|\vec{E}\|^2}{2} + \dfrac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$

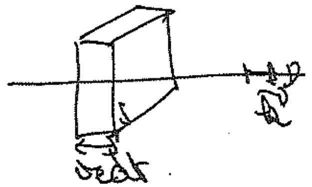
$w_{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\cos^2(\omega t - ax - by) + \dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega^2}(a^2+b^2)\cos^2(\omega t - ax$

$w_{em} = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - ax - by)$

$\boxed{\langle w_{em}\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}}$

(3)

On considère une surface $S \perp$ à $\vec{k}$



Soit v_e la vitesse de propagation de l'énergie.

Déterminons l'énergie moyenne traversant S pendant dt :

$$d\mathcal{E} = \|\langle \vec{\Pi} \rangle\| S\,dt = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega}\sqrt{\alpha^2+k^2}\,S\,dt$$

$$d\mathcal{E} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S\,dt = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c\,S\,dt.$$

A t cette énergie est contenue dans le volume $S v_e dt$

$$d\mathcal{E} = \langle w_{em} \rangle S v_e dt = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} v_e S\,dt$$

En identifiant les 2 expressions, on obtient

$\underline{v_e = c}$

DM 14 :

Partie II : L'ionosphère.

1 – → les ions positifs sont considérés comme fixes car plus massifs que les électrons

→ la force magnétique est négligeable devant la force électrique car :

$$\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \leqslant \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{\|\vec{v}\|}{v_\varphi} \ll 1 \quad \text{car } v_\varphi \geq c$$

→ Densité $n \simeq 10^{12}\,m^{-3}$, le plasma étant peu dense, pas de force de frottement à prendre en compte

→ poids négligé.

2ème loi de Newton appliquée à un électron :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} = i\omega m_e \vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{-e}{i\omega m_e}\vec{E}$$

$$\vec{j} = -n e \vec{v} = \frac{n e^2}{i\omega m_e}\vec{E}$$

$\underline{\vec{j} = \gamma(\omega)\vec{E}}$ avec $\boxed{\gamma(\omega) = \frac{n e^2}{i m_e \omega} = -i\frac{n e^2}{m_e \omega}}$

γ Conductivité complexe en $S.m^{-1}$

2 – Dans le plasma les eq. de Maxwell s'écrivent

$$\text{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E}) = \vec{grad}(div\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\,\vec{B})$

$\Delta\vec{E} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

alors $-k^2\vec{E} = i\mu_0\gamma\omega\vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}$

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\omega\left(-i\frac{n_e e^2}{m_e\omega}\right)$

$\boxed{k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}\right) = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}}$

avec $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}}}$

3- $\langle P_{vol}\rangle = \frac{1}{2}Re(\vec{j}\cdot\vec{E}^*)$

$\langle P_{vol}\rangle = \frac{\|\vec{E}\|^2}{2}Re(\gamma) = 0$

Le milieu n'absorbe aucune puissance moyenne

Une onde progressive se propage sans atténuation dans le plasma.

4- $n_{emax} = 10^{12}\,m^{-3}$ .....

$f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{n_{emax}e^2}{m_e\varepsilon_0}}$ $f_p = 9\,MHz$

Les ondes peuvent se propager dans l'ionosphère si $k^2 > 0 \Rightarrow f > f_p = 9\,MHz$

5- $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{f_p}{f}\right)^2}}}$ $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

$k^2 = \frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2} \Rightarrow 2k\,dk = 2\omega\,d\omega$ $v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$

$n = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{f_p}{f}\right)^2}$ indice inférieur à 1

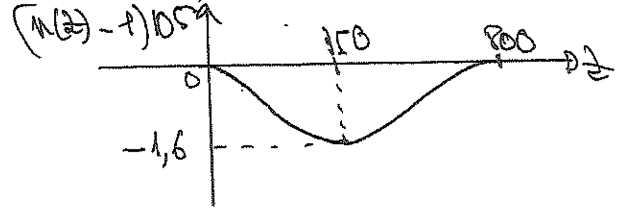
v_φ dépend de ω → milieu dispersif

6- $n = \left(1-\left(\frac{f_p}{f_1}\right)^2\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\frac{f_p^2}{f_1^2}$ $\left(\frac{f_p}{f_1}\right)^2 \ll 1$

$\boxed{n \simeq 1 - \frac{n_e e^2}{8\pi^2 m_e\varepsilon_0}\frac{1}{f_1^2} = 1 - a\frac{n_e}{f_1^2}}$ avec $a = \frac{e^2}{8\pi^2 m_e\varepsilon_0}$

n min pour $z = 350\,km$, $n(0) = 1$

$n(350\,km) - 1 = -1{,}6\cdot 10^{-5}$



7- Dans le vide le temps mis par l'onde pour parcourir la distance H_0 vaut $t_{vide} = \frac{H_0}{c} = \frac{1}{c}\int_0^{H_0}dz$

Dans l'ionosphère d'indice $n(z)$: temps de parcours sur une hauteur comprise entre z et $z+dz$, $v_g = n(z)c$

$dt = \frac{H_0}{n(z)c} = \frac{H_0}{v_g}$

$t_{ion} = \int_{z=0}^{H_0}\frac{1}{v_g}dz$

$\tau_1 = t_{ion} - t_{vide} = \frac{1}{c}\int_0^{H_0}\left(\frac{c}{v_g} - 1\right)dz$

$\tau_1 = \frac{1}{c}\int_0^{H_0}\left(\frac{1}{n(z)} - 1\right)dz = \frac{1}{c}\int_0^{H_0}\left(\left(1 - \frac{a\,n_e}{f_1^2}\right)^{-1} - 1\right)dz$

$\tau_1 \simeq \frac{1}{c}\int_0^{H_0}\frac{a\,n_e(z)}{f_1^2}dz$

$\boxed{L_1 = c\tau_1 = \frac{a}{f_1^2}\int_0^{H_0}n_e(z)\,dz}$

8 - le CET correspond à l'aire sous la courbe de la figure 6 soit environ $8 \times \overset{10^9}{100} \times 2 \cdot 10^{-11}$

$CET \simeq 1{,}2 \cdot 10^{17}\ m^{-2}$

$L_1 \simeq 5{,}2\ m$ précision acceptable

9 - $\tau_{ret} = \tau_1 - \tau_2 = \dfrac{a\,CET}{c}\left(\dfrac{1}{f_1^2} - \dfrac{1}{f_2^2}\right)$

$$CET = \frac{c\,\tau_{ret}}{a\left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}\right)} = 1{,}9 \cdot 10^{19}\ m^{-2}$$

$L_1 = 311\ m$) commence à devenir important

10 - Carte obtenue en mesurant τ_{ret} pour différents récepteurs placés à la surface de la terre.
le CET est + élevé à l'endroit où le rayonnement solaire est plus important (soleil au zenith)
⇒ ionisation plus importante !
Du fait de la rotation de la terre sur elle-même, cette zone se déplace vers l'Ouest au cours du temps.