

DM SCIENCES PHYSIQUES N°11

Dans tout le problème, on travaillera en coordonnées cartésiennes de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Données numériques :

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Constante d'Avogadro : $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Rayon de la Terre : $R_T = 6400 \text{ km}$

PARTIE I : onde dans le vide

1- On considère une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω , de vecteur d'onde $\vec{k}$ se propageant dans le vide en l'absence de charge et courant .

Ecrire en notation complexe les champs électrique et magnétique de cette onde . On appellera $\underline{\vec{E}}_0$ et $\underline{\vec{B}}_0$ les amplitudes complexes de ces champs .

Montrer que l'onde est transversale et établir la relation liant les champs électrique et magnétique .

Etablir l'équation d'ordre 2 vérifiée par le champ électrique .

On considère maintenant une onde plane progressive monochromatique se propageant dans une direction faisant l'angle θ avec Ox .

Le champ électrique de cette onde plane s'écrit $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - ax - by)} \vec{e}_z$ avec $a > 0$ et $b > 0$

2- Décrire complètement l'onde considérée .

3- Etablir la relation qui lie a , b , ω et c (vitesse de la lumière) comme s'appelle cette relation .

4- Que représentent a et b ? Déterminer en fonction de a et b , la longueur d'onde et la direction θ de propagation de l'onde .

5- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde .

6- Déterminer le vecteur de Poynting ainsi que sa valeur moyenne .

7- Déterminer la densité volumique d'énergie ainsi que sa valeur moyenne . Déterminer la vitesse d'énergie de cette onde (démonstration demandée) .

PARTIE II : L'ionosphère

On considérera que l'ionosphère forme un plasma peu dense qui contient une densité particulière uniforme n_e d'électrons par unité de volume, et autant d'ions (de forte masse donc presque immobiles) de sorte que la charge totale reste partout nulle. On étudie ici encore la propagation d'une onde plane progressive et monochromatique, de champ électrique complexe $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})}$ dans le plasma.

1- Dans le cadre non relativiste, en justifiant les simplifications, expliciter l'équation du mouvement des électrons et en déduire la densité volumique de courant dans ce milieu sous la forme $\vec{J} = \chi(\omega) \underline{\vec{E}}$; préciser l'expression, le nom et la dimension de la grandeur complexe $\chi(\omega)$.

2- Montrer que cette expression de $\vec{J}$ permet d'obtenir une équation de dispersion (ED) de la forme $k'^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$; préciser en particulier l'expression de la grandeur ω_p .

3- Que peut-on dire de la puissance moyenne dissipée dans ce milieu lors du passage de l'onde ? Que peut-on en déduire lors de la propagation de l'onde dans le plasma .

La figure 1 présente la densité d'électrons libres n_e en fonction de l'altitude z .

4- Évaluer la fréquence plasma f_p déduite de la pulsation plasma ω_p pour la densité maximale d'électrons libres. Quelle est la bande de fréquence utilisable pour les communications entre un satellite dont l'altitude est supérieure à 1 000 km et la Terre?

On considère dans toute la suite que l'on se situe dans cette bande de fréquence.

5- Exprimer la vitesse de phase v_ϕ des ondes électromagnétiques dans le plasma en fonction de f , c et f_p .

En déduire l'expression de l'indice optique $n = \frac{c}{v_\phi}$ en fonction de f et de f_p . Quelle est la particularité de cet indice? Comment qualifier le milieu constitué par la plasma?

Déterminer l'expression de la vitesse de groupe v_g des ondes électromagnétiques dans le plasma

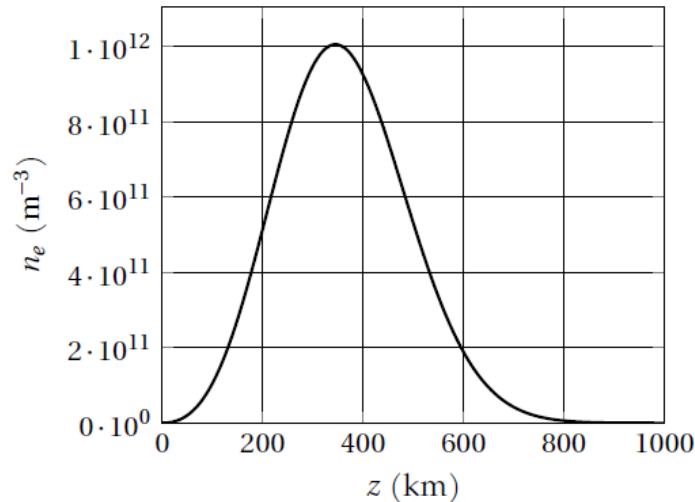


Figure 1 : densité d'électrons libres en fonction de l'altitude

La fréquence de l'onde électromagnétique est $f_1 = 1575$ MHz.

6- Montrer que l'indice optique local peut s'écrire : $n \approx 1 - a \frac{n_e}{f_1^2}$ où $a = \frac{e^2}{8\pi^2 m_e \epsilon_0}$.

Tracer la fonction $(n(z) - 1) \cdot 10^5$ après avoir évalué ses extrema.

On suppose que l'ionosphère s'arrête à l'altitude $H_0 = 1000$ km.

On considère un paquet d'ondes de fréquence centrale f_1 émis par un satellite en haute altitude ($z > H_0 = 1000$ km) et reçu par un récepteur au sol ($z = 0$) à la verticale du satellite. On note τ_1 le retard provoqué par la présence de l'ionosphère par rapport à une onde qui se propagerait dans le vide selon le même trajet et $L_1 = c \tau_1$ l'erreur de distance due à l'ionosphère.

7- Montrer que $\tau_1 = \frac{1}{c} \int_0^{H_0} \left(\frac{c}{v_g} - 1 \right) dz$ et que $L_1 \approx \frac{a}{f_1^2} C_{ET}$ où $C_{ET} = \int_0^{H_0} n_e dz$ est appelé « Contenu Électronique Total de l'ionosphère ».

8- Estimer le C_{ET} en m^2 pour la densité n_e de la figure 1 et en déduire l'erreur de distance L_1 provoquée par l'ionosphère. Commenter.

La valeur du C_{ET} fluctue principalement selon l'activité solaire et l'alternance jour-nuit. La correction nécessaire ne peut être connue en temps réel si l'on n'utilise qu'une seule fréquence de signal. C'est pourquoi les signaux GPS utilisent deux fréquences, f_1 et $f_2 = 1228$ MHz.

9- Soit $\tau_{ret} = \tau_2 - \tau_1$ le retard de réception entre les deux signaux de fréquences f_1 et f_2 .

Montrer que la mesure de τ_{ret} permet de déterminer le CET à une date donnée.

Application numérique : on mesure $\tau_{ret} = 6,7 \cdot 10^{-7} s$. Calculer l'erreur L_1 .

La figure 2 présente deux cartes de CET calculées en temps réel et disponibles en ligne. L'échelle à droite représente la valeur de CET exprimée en TECU, $1\text{TECU} = 1 \times 10^{16} \text{ m}^{-2}$.

10- Quel est le principe d'obtention de cette carte en temps réel? Commenter et expliquer l'évolution entre les deux cartes.

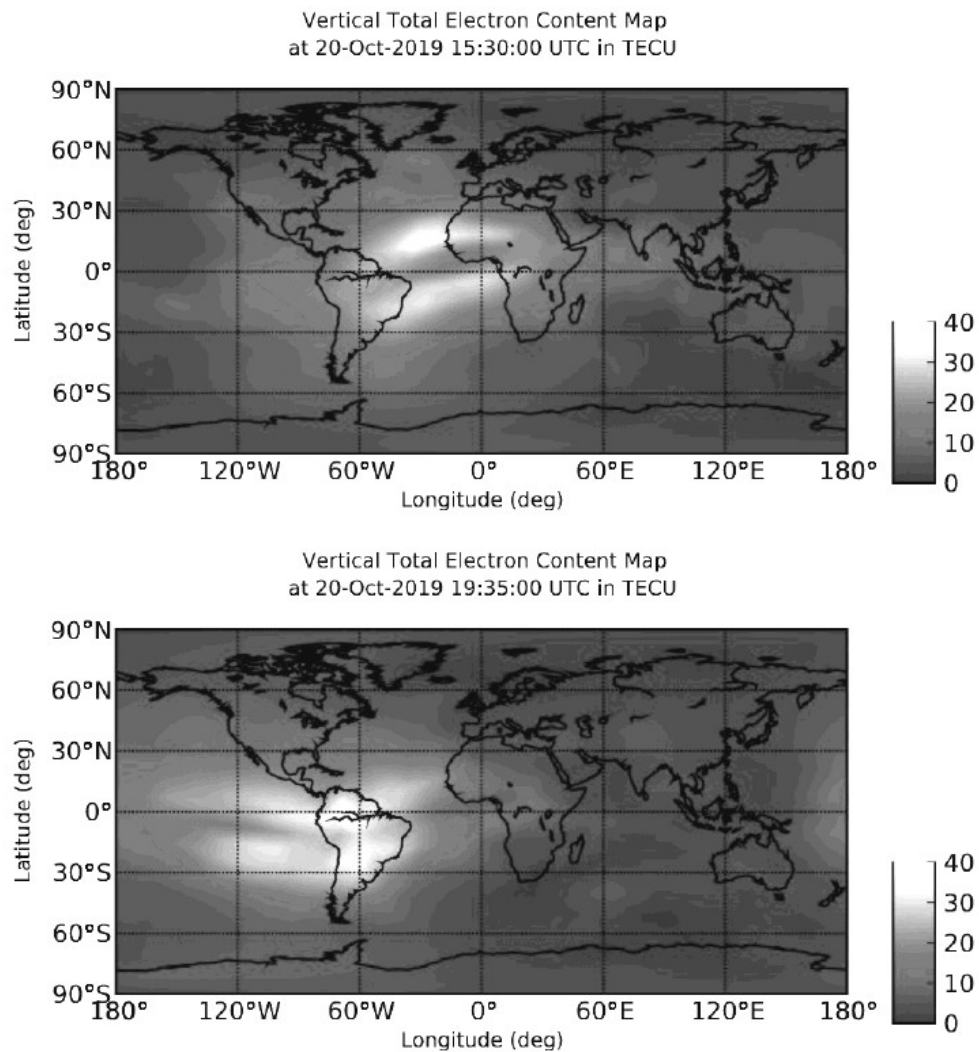


Figure 2 : Cartes de C_{ET}