Extrait Mines MPI 2025 :

Principe d'un cinémomètre radar.

A – Transmission et réflexion d'une onde :

1 – Dans le vide :

$\mathrm{div}(\vec{E}_{inc}) = 0$

$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}_{inc}) = -\dfrac{\partial \vec{B}_{inc}}{\partial t}$

$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}_{inc}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}_{inc}}{\partial t}$

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_{inc}) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}_{inc}) - \vec{\Delta}\vec{E}_{inc} = -\vec{\Delta}\vec{E}_{inc} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}_{inc})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Delta}\vec{E}_{inc} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}_{inc}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Or $\vec{E}_{inc} = E_0 \exp[i(\omega t - kx)]\,\vec{e}_z$

$\vec{\Delta}\vec{E}_{inc} = -k^2\vec{E}_{inc}.$

$\dfrac{\partial^2 \vec{E}_{inc}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E}_{inc}$

d'où $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}}$

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi f}{c} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{c}{f}$$

2 – $\gamma_0 \vec{E} = \vec{j} + \tau\dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}$

$[\gamma_0] = \dfrac{[\vec{j}]}{[\vec{E}]}$

$[\vec{j}] = \dfrac{I}{L^2}$ $\quad [\vec{E}] = \dfrac{[U]}{L} = \dfrac{[UI]}{IL}$

$[\vec{E}] = \dfrac{M.L^2.T^{-2}}{I.L.T} =$

$$\underline{[\gamma_0] = \frac{I^2LT}{ML^4T^{-2}}} = \underline{I^2 M^{-1}.T^3.L^{-3}}$$

τ = temps caractéristique d'évolution de $\vec{j}$ en fonction du temps.

Dans le conducteur :

$\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B})$$

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En passant en notation complexe (3)
on a :

$$\gamma_0 \vec{E} = (1 + i\tau\omega)\vec{j}$$

$$\vec{j} = \frac{\gamma_0}{1+i\tau\omega}\vec{E}$$

et $-k^2\vec{E} = i\mu_0\omega\vec{j} - \mu_0\varepsilon_0\omega^2\vec{E}$

$$k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \frac{i\mu_0\gamma_0\omega}{1+i\tau\omega}$$

or $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{i\mu_0\gamma_0\omega}{1+i\tau\omega}}$$

4- $k = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{i}{\delta}$

$\frac{2\pi}{\lambda} = Re(k)$ est associée à la propagation de l'onde.

λ = longueur d'onde dans le milieu

→ δ est la distance caractéristique d'atténuation de l'onde dans le milieu. (4)

5- $\omega \ll \omega_1 = \frac{1}{\tau} = 10^{14}\ \text{rad.s}^{-1}$ $\quad k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma_0\omega$

pour $\frac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_0\gamma_0\omega$ alors $k^2 \simeq -i\mu_0\gamma_0\omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}\mu_0\gamma_0\omega$

$$k = e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\mu_0\gamma_0\omega}$$

$$k = (1-i)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{i}{\delta}$$

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$ $\Rightarrow$ $\log\delta = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}\right)$

$\log\delta = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\mu_0\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{2}\log(\omega)$

$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$

$\omega \ll \omega_2 = \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} = 1{,}6\cdot10^{18}$

$\omega \ll \omega_1$

On obtient $\log(\delta)$ et $\log(\lambda)$ fonctions affines de $\log(\omega)$ pente $-\frac{1}{2}$.

ce qui correspond à la première partie de la courbe. $f \ll 10^7$ MHz

Pour $\omega \gg \omega_1 = \frac{1}{\tau}$ $\quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\gamma_0}{\tau}$

Pour $\frac{\omega^2}{c^2} \gg \frac{\mu_0\gamma_0}{\tau}$ $\Rightarrow$ $\omega \gg \sqrt{\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\tau}} = \sqrt{\omega_1\omega_2} \simeq 10^{16}\ \text{rad.s}^{-1}$

$k^2 \simeq \frac{\omega \alpha}{c^2}$

$k \simeq \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\log(k) = A - \log(c)$) dernière partie de la courbe.

D'où les 3 domaines :

$k^2 = -i\mu_0\sigma\omega$ ¦ ¦ $k^2 \simeq \frac{\omega\alpha}{c^2}$

$\omega_1 = \frac{1}{\tau}$ ($f_1 \simeq 1{,}6\,10^{13}$ Hz) ; $\omega_2 = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \tau}}$ ($f_2 \simeq 1{,}9.10^{15}$ Hz) ; ω

Les valeurs numériques des fréquences f_1 et f_2 sont en accord avec la figure 5.

6- $f \simeq 25$ GHz $= 25.10^3$ MHz

$f \ll f_1$ = première partie de la courbe.

$k \simeq \frac{1-i}{\delta} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{i}{\delta}$

$\delta = d$

$\lambda = 2\pi d$

$\log(\delta)$ fonction affine de $\log(f)$ de pente $-\frac{1}{2}$ (en accord avec le graphique)

$\log(\lambda) = \log 2\pi + \log(\delta)$

$\log(\lambda) = 0{,}8 + \log(\delta)$) décalage de 0,8 entre les 2 courbes qui sont de même pente, donc parallèles entre elles (en accord avec le graphe).

$$d = \sqrt{\frac{2}{4\pi.10^{-7} \times 1{,}4.10^{7} \times 25.10^{9} \times 2\pi}}$$

$d = 8{,}5.10^{-7}$ m

d étant très faible, on peut considérer le conducteur comme parfait.

Le matériau sera donc opaque aux ondes radar.

(7)

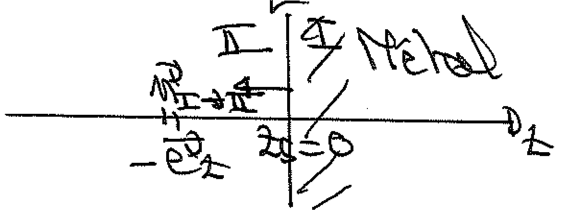
B – Réflexion métallique

7 – L'onde réfléchie ayant même fréquence et même polarisation que l'onde incidente, son champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_{ré} = \underline{E_{0r}} \exp\left[i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})\right] \vec{e}_x$$

$\vec{k}_r$ vérifie les lois de Descartes de la réflexion $\Rightarrow \vec{k}_r = -\vec{k}_{inc} = -k\vec{e}_z$

$$\vec{E}_{ré} = E_{0r} \exp\left[i(\omega t + kz)\right] \vec{e}_x$$



Le métal étant parfait $\vec{E}_{métal} = \vec{0}$ d'où, d'après la relation de passage :

$$\forall t, \vec{E}_{inc}(z=0) + \vec{E}_{ré}(z=0) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

(8)

Si on projette la relation sur $\vec{e}_z$, comme $\vec{E}_{inc}$ et $\vec{E}_{ré}$ sont dirigés selon $\vec{e}_x$, on obtient $\underline{\sigma = 0}$.

En projection sur $\vec{e}_x$, on obtient :

$$\forall t, \quad E_0 \exp(i\omega t) + \underline{E_{0r}} \exp(i\omega t) = 0$$

D'où $\underline{E_{0r}} = -E_0$

$$\vec{E}_{ré} = -E_0 \exp\left(i(\omega t + kz)\right)\vec{e}_x.$$

$$\vec{E}_{réf} = E_0' \exp\left[i(\omega' t + k' z)\right]\vec{e}_x$$

8 – ($\vec{E}_{inc}$ et $\vec{E}_{réf}$) sont des OPPM se propageant dans le vide d'où : $k = \frac{\omega}{c}$ et $k' = \frac{\omega'}{c}$

On réécrit la relation de passage sur le plan métallique parfait :

$$\forall t, \vec{E}_{inc}(z=-vt) + \vec{E}_{réf}(z=-vt) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

$\Rightarrow \sigma = 0$ (proj sur $\vec{e}_z$)

En projetant sur $\vec{e}_x$, on obtient: **(9)**

$$\forall t,\ E_0 \exp[i(\omega t + kvt)] + E_0' \exp[i(\omega' t - k'vt)] = 0$$

D'où $E_0' = -E_0$

$$\omega + kv = \omega' - k'v$$

$$\omega + \frac{\omega}{c} v = \omega' - \frac{\omega'}{c} v$$

$$\boxed{\omega' = \omega \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

9- D'après la relation de structure:

$$\vec{B}_{inc} = \frac{k\vec{e}_z \wedge \vec{E}_{inc}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \exp[i(\omega t - kz)]\,\vec{e}_y$$

$$\vec{B}_{ref} = -\frac{k'\vec{e}_z \wedge \vec{E}_{ref}}{\omega'} = +\frac{E_0}{c} \exp[i(\omega t + k'z)]\,\vec{e}_y$$

En $z = -vt$

$$\vec{B}_{inc}(z=-vt) + \vec{B}_{ref}(z=-vt) = \mu_0 \vec{i}_s \wedge \vec{e}_z$$

$\vec{i}_s$ selon $\vec{e}_x$ $\quad \vec{i}_s = i_s \vec{e}_x$.

$$\forall t,\ \frac{E_0}{c} \exp[i(\omega t + kvt)] + \frac{E_0}{c} \exp[i(\omega' t - k'vt)] = \mu_0 i_s$$

(10)

Comme $\omega' - k'v = \omega + kv$

$$\vec{i}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \exp[i(\omega + kv)t]\,\vec{e}_x$$

Oscillations à la pulsation

$$\omega_i = \omega + kv = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

10- Au 1er ordre en $\frac{v}{c}$:

$$\omega' = \omega \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} \simeq \omega\left(1+\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\omega' \simeq \omega\left(1 + \frac{2v}{c}\right)$$

$$\Delta \simeq \frac{2v}{c}$$

$v \simeq 100\ \text{km.h}^{-1}$ $\qquad \Delta = \frac{10^5}{3600 \times 3.10^8} \simeq 10^{-7}$

• En sortie du multiplieur on obtient un signal du type

$$s_M(t) = S \cos(\omega t + \varphi_1) \cos\left(\omega\left(1 + \frac{2v}{c}\right)t + \varphi_2\right)$$

$$s_M(t) = \frac{S}{2}\left[\cos\left(\frac{2\omega v}{c} t + \varphi_2 - \varphi_1\right) + \cos\left(\omega\left(2 + \frac{2v}{c}\right)t + \varphi_1 + \varphi_2\right)\right]$$

En choisissant un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c telle

$\frac{2\omega v}{\pi c} \ll f_c \ll \frac{2\omega}{2\pi}$ on obtient un signal de fréquence fondamentale $f_1 = \frac{2\omega v}{\pi c} = 2f\frac{v}{c}$ proportionnelle à v