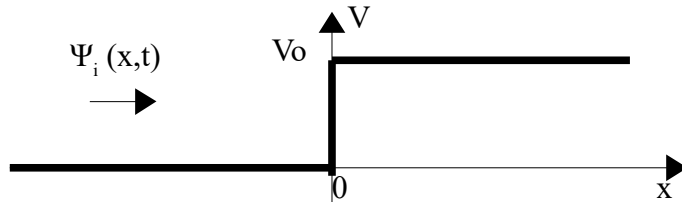


EXERCICES PHYSIQUE QUANTIQUE 2

Exercice 1: marche de potentiel

Un électron de masse m venant du domaine $x < 0$ se propage vers les $x > 0$. Son énergie est E .

En $x = 0$, il rencontre une marche de potentiel $V(x) = V_0 > 0$.



1- Donner la relation entre E et la quantité de mouvement p_0 dans le domaine $x < 0$. Écrire l'expression de la fonction d'onde incidente de l'électron se dirigeant vers la droite $\Psi_i(x, t)$, pour $x < 0$, en fonction de l'énergie E , de la quantité de mouvement p_0 . On notera A l'amplitude de la fonction d'onde.

2- Écrire la fonction d'onde $\Psi_r(x, t)$ pour un électron réfléchi, dans le domaine $x < 0$. On notera B son amplitude.

On s'intéresse à la fonction d'onde dans le domaine $x > 0$.

3- Pour $E > V_0$, écrire l'expression de la quantité de mouvement p' de l'électron se dirigeant vers les x croissants et en déduire l'expression de la fonction d'onde $\Psi_t(x, t)$, d'amplitude C .

4- Écrire les conditions de continuité pour les fonctions d'onde et leur dérivée spatiale. En déduire les rapports $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{A}$.

5- Donner les expressions des vecteurs densité de courant de probabilité $\vec{J}_i, \vec{J}_r$ et $\vec{J}_t$ en fonction de A, B, C, p_0, p' et m .

Exprimer les probabilités de réflexion R et de transmission T de l'électron en $x = 0$ en fonction de E et V_0 .

A.N. pour $E = 5 \text{ eV}$ et $V_0 = 3 \text{ eV}$.

6- Que prévoit dans ce cas la physique classique ?

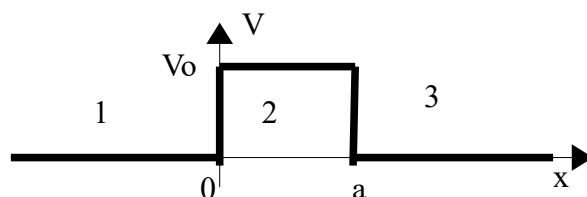
Dans le cas où $0 < E < V_0$, montrer que l'on peut considérer la valeur imaginaire $p' = i\sqrt{2m(V_0 - E)}$ pour exprimer $\Psi_t(x, t)$. Que peut-on dire alors de la probabilité de réflexion R ?

Qu'est ce qui différencie le cas quantique du cas classique ?

Examiner le cas où $V_0 \rightarrow \infty$.

Exercice 2 : barrière de potentiel, effet tunnel.

On considère un flux de particules monénergétiques d'énergie E , incidente depuis $x \rightarrow -\infty$, se propageant suivant les x croissants, arrivant dans la zone d'action d'un potentiel donné par $V(x) = V_0 > 0$ pour $x \in [0, a]$ (dans la zone (2)) et $V(x) = 0$ partout ailleurs (zones (1) et (3)).



1- On considère le cas $E < V_0$. Donner la forme des fonctions d'onde dans les trois domaines considérés. On posera $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

2 -En écrivant les conditions de raccordement, montrer que:

$$A_1 = A_3 e^{ika} \left(\cosh(qa) + \frac{i}{2} \left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q} \right) \sinh(qa) \right)$$

3- a- En utilisant des densités de courant de probabilité dont on précisera l'expression et le sens physique, montrer que l'expression du coefficient de transmission de la barrière noté

T met sous la forme
$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{q}{k} + \frac{k}{q} \right)^2 \sinh^2(qa)}$$
 Il sera plus aisé d'exprimer d'abord $1/T$ puis

en utilisant la relation $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, d'en déduire T.

b-Dans le cas où $qa \gg 1$ donner l'expression approchée de T. À quelle situation physique correspond cette approximation? Discuter alors la nature de l'onde dans la barrière de potentiel (zone (2)). Pourquoi parle-t-on d'effet tunnel pour décrire cet effet purement quantique? Quelle est l'ordre de grandeur de la portée de l'onde de matière dans la zone 2 ?

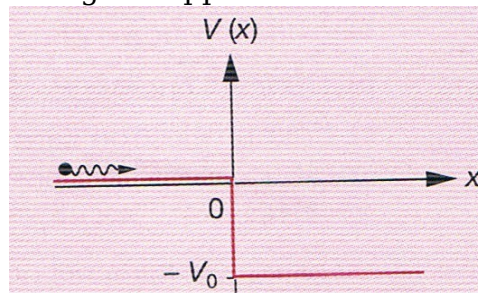
c- Évaluer numériquement l'ordre de grandeur de la portée de l'onde dans la zone (2), pour électron d'énergie $E = 1 \text{ eV}$, avec $V_0 = 2 \text{ eV}$, $a = 10^{-10} \text{ m}$, masse de l'électron

$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. On revient à l'expression de T donnée au 3-a mais l'approximation $qa \gg 1$ n'est plus valable. Évaluer T pour cet électron, discuter dans ce cas la probabilité de présence de la particule derrière la barrière.

Reprendre le calcul pour un proton dont la masse est environ 1840 fois celle de l'électron, commenter.

Exercice 3: Falaise de potentiel

Une particule de masse m et énergie E approche la falaise de potentiel .



a- Quel est le mouvement classique?

Quel élément nouveau par rapport au cas classique fera apparaître l'étude quantique .

b- On cherche des états stationnaires . Déterminer la partie temporelle de la fonction d'onde ainsi que l'équation vérifiée par la partie spatiale de la fonction d'onde . Résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les deux domaines .

c-Quelles relations de continuité utiliser?

d- Donner les définitions des vecteurs densité de probabilité pour les ondes incidente , réfléchi et transmise . Définir les coefficients de réflexion R et de transmission T en probabilité . Quelle relation lie ces deux coefficients ?

e- Quel est la probabilité qu'une particule d'énergie $E = \frac{V_0}{2}$ fasse demi-tour ?

f-Commenter quelques situations particulières.

Exercice 4 :Boîte quantique 3D .

On confine une particule de masse m, d'énergie $E > 0$, dans une boîte de dimensions $l_x * l_y * l_z$. Le potentiel est nul à l'intérieur de la boîte et devient infini sur les bords.

1- Exprimer l'équation de Schrödinger en coordonnées cartésiennes.

2- On recherche des solutions stationnaires de la forme $\phi_x(x)\phi_y(y)\phi_z(z)\chi(t)$. Déterminer les équations portant sur $\phi_x(x)$,sur $\phi_y(y)$, sur $\phi_z(z)$ et sur $\chi(t)$. On introduira 4 constantes notées E, k_x, k_y, k_z .

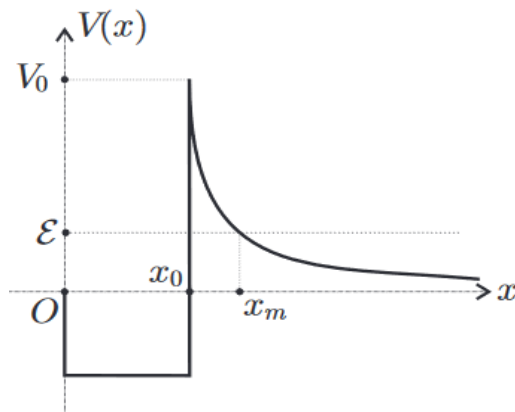
3- Quelles sont les conditions aux limites sur la fonction d'onde, sur les bords de la boîte ? En déduire les fonctions d'onde, correctement normalisées, et les niveaux d'énergie

possibles pour la particule confinée dans la boîte quantique, que l'on notera sous la forme $E(n_x, n_y, n_z)$, avec n_x, n_y, n_z trois nombres entiers.

4- Déterminer les 4 premiers niveaux d'énergie dans le cas particulier d'une boîte cubique, pour laquelle $l_x = l_y = l_z = l$. Commentaire?

Exercice 5 : Radioactivité alpha .

La radioactivité α est l'émission de noyaux d'hélium 4, appelés particules α , par des noyaux atomiques lourds (généralement $Z > 82$), selon la réaction ${}_Z^AX \rightarrow {}_2^4He + {}_{Z-2}^{A-4}Y$ dans laquelle A représente le nombre de nucléons (protons et neutrons) et Z le nombre de protons du noyau X. George Gamow fut le premier, en 1928, à interpréter la radioactivité α grâce à l'effet tunnel. Il considéra que le noyau X était constitué au préalable de la particule α et du noyau Y. L'énergie potentielle $V(x)$ d'interaction entre les deux particules est une fonction de la distance x qui les sépare, son allure est représentée sur la figure ci-dessous:



- pour de grandes valeurs de x , cette énergie potentielle correspond à la répulsion électrostatique des protons de la particule alpha et du noyau Y et présente un profil

coulombien en $\frac{K}{4\pi\epsilon_0 x}$

- pour $x < x_0$, les interactions nucléaires attractives interviennent et l'énergie potentielle est un puits très profond ;

- pour l'uranium 238, $Z = 92$ et $x_0 = 3,50 \cdot 10^{-15} m$. La mesure de l'énergie E des particules α émises par ce noyau donne une valeur proche de 4,00 MeV.

1- a- Déterminer l'expression de la constante K en fonction de Z et de la charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$. En déduire la hauteur V_0 de la barrière d'énergie potentielle à franchir.

b- Calculer la distance x_m à laquelle l'énergie potentielle coulombienne est égale à E . Donner un ordre de grandeur de la largeur de la barrière d'énergie potentielle.

c- Peut-on considérer que la barrière est épaisse? On donne la masse de la particule α ,

$$m = 6,64 \cdot 10^{-27} kg \text{ et on rappelle que } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 SI.$$

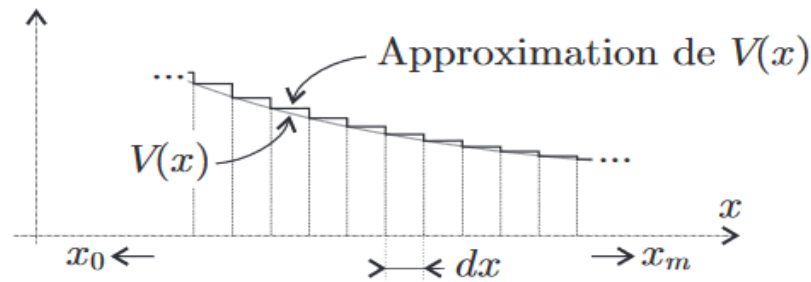
Etant donné que la barrière d'énergie potentielle n'a pas une simple forme rectangulaire de largeur a , on ne peut plus utiliser directement l'expression $\ln(T) \approx -2qa$ avec

$$q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Pour $x > x_0$, on peut cependant approcher la fonction $x \rightarrow V(x)$ par

une succession de barrières rectangulaires de hauteur $V(x)$ et de largeur dx (voir figure ci-dessous), suffisamment épaisse pour pouvoir utiliser, en l'adaptant, l'approximation

$$\ln(T) \approx -2qa.$$



2- a- En généralisant l'expression $T \approx T_0(E, V_0) e^{-2qa}$, déterminer $T(x + dx)$ en fonction de $T(x)$, q et dx . En considérant, pour simplifier la suite des calculs, que $qdx \ll 1$ établir la relation:

$$\ln(T) \approx -\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{2m \left(\frac{K}{4\pi\epsilon_0 x} - E \right)} dx.$$

b- On admettra que $\int_{x_0}^{x_m} \sqrt{\frac{x_m}{x} - 1} dx \approx x_m \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{x_0}{x_m}} \right)$ En déduire la loi de Gamow-Condon-

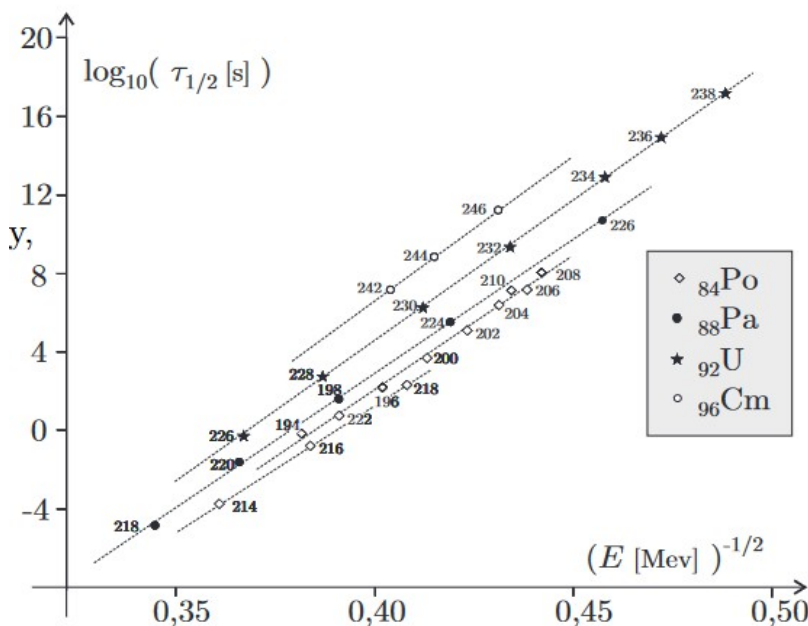
Gurney valable pour $\frac{x_0}{x_m} \ll 1$: $\ln T = a - \frac{b}{\sqrt{E}}$. On exprimera a et b en fonction des données du problème.

3- a- En considérant que la particule fait des allers-retours dans une région d'extension $2x_0$ et que l'on peut obtenir un ordre de grandeur de la vitesse de la particule α en utilisant la relation $E = \frac{1}{2} m v^2$, estimer l'expression du temps moyen t_m entre deux rebonds de la particule sur la barrière d'énergie potentielle.

b- En déduire le nombre moyen de rebonds par seconde f_m , puis la probabilité dp d'émission α pendant dt .

c- Obtenir l'équation différentielle sur le nombre de noyaux $N(t)$ non désintégrés à la date t . La résoudre et exprimer $N(t)$ en fonction de $N(0)$, t , f_m , T , puis exprimer le temps de demi-vie τ de l'émetteur α . En admettant que t_m varie peu d'un émetteur α à un autre, déterminer une relation entre $\ln(\tau)$ et E . Cette loi fut établie empiriquement par Geiger et Nuttall en 1911.

4- Comparer les résultats précédents à ceux que l'on peut déduire des mesures rassemblées sur la figure ci-dessous.



Exercice 6: puit de potentiel infini et fonctions d'onde .

Une particule qui se déplace sur un axe Ox est soumise a un potentiel V tel que $V=0$ pour $0 < x < a$ et $V= \infty$ pour $x < 0$ et $x > a$.

On écrit les fonctions d'onde des états stationnaires sous la forme :

$\Psi_n(x,t) = \Phi_n(x) f_n(t)$. On désigne par E_n les énergies correspondantes.

1- Déterminer $\Psi_n(x,t)$.

2- Tracer la densité linéique de probabilité de présence en fonction de x pour $n=1$, pour $n=2$ et pour $n=3$

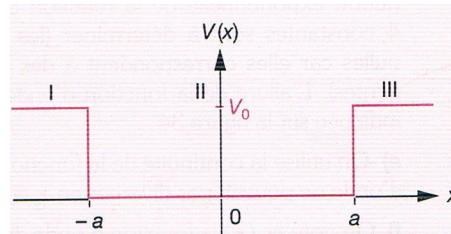
Pour une énergie E_n , quel est le nombre de nœud entre 0 et a ?

3- Que se passe-t-il si a diminue ? Comment est modifié l'écart entre deux niveaux d'énergie successifs . Comment est modifiée l'énergie cinétique ? Comment est modifiée l'énergie minimale de la particule ? Retrouver qualitativement l'énergie minimale a partir de l'inégalité de Heisenberg spatiale.

4- Quelle limite retrouve-t-on lorsque a tend vers l'infini ? A quoi est due la quantification de l'énergie ? Dans quel autre domaine de la physique a-t-on déjà rencontré une quantification des pulsations propres ?

Exercice 8 : puits rectangulaire fini .

On considère le puits de potentiel suivant : l'énergie potentielle est nulle sur $[-a, a]$, mais vaut $V(x) = V_0 > 0$ en dehors .



1- On s'intéresse aux états liés. Quelles sont les valeurs limites possibles de l'énergie?

On pose $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

2- Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les différentes zones,

3- Combien de constantes interviennent dans les amplitudes? Lesquelles peut-on déjà éliminer?

4- Quelles sont les différentes conditions aux limites utilisables?

5- Vu la forme du potentiel, on admet que les fonctions d'onde des états stationnaires sont soit paires, soit impaires. En déduire la relation $ka \tan(ka) = K a$ ou $ka \cotan(ka) = -Ka$.

6- Etablir la relation $(ka)^2 + (Ka)^2 = \frac{2ma^2 V_0}{\hbar^2}$

7- Interpréter graphiquement les solutions dans le plan de coordonnées (ka, Ka) à l'aide de la figure ci-dessous où les courbes 1 représentent $X \tan X$ et les courbes 2 $-X \cotan X$.

