

EXERCICES PHYSIQUE QUANTIQUE 1

Exercice 1: classique ou quantique .

1- Un mouche de masse $m = 5 \text{ g}$ et de longueur environ 1 cm se déplace à une vitesse v de l'ordre de 8 km.h^{-1} .

Déterminer si cette mouche peut subir un phénomène de diffraction lors de la traversée d'une porte de $L = 1 \text{ m}$ de largeur .

2- On considère un grain de poussière de diamètre d environ $1 \mu\text{m}$, de masse $m = 10^{-15} \text{ kg}$ et se déplaçant à une vitesse v de l'ordre du mm par seconde . Quelle est sa longueur d'onde de De Broglie ? Quelle inégalité doit satisfaire l'incertitude sur la quantité de mouvement de ce grain de poussière si l'on suppose que sa position est connue à $0,01 \mu\text{m}$ près ? Conclusion .

Données pour la suite :

masse de l'électron $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

masse du proton $m_p = 1836 m_e$

nombre d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

masse molaire du cuivre $63,5 \text{ g.mol}^{-1}$

masse volumique du cuivre $8,96 \text{ g.cm}^{-3}$

constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

volume molaire d'un gaz dans les conditions usuelles de température et pression 25 L

relation entre l'énergie cinétique moyenne d'une particule microscopique et la

température $E_c = \frac{3}{2} k_B T$

3- On considère un gaz moléculaire comme le dihydrogène . Le système est étudié dans les conditions normales de température (300 K) et pression .

a- Evaluer la distance interparticulaire au sein du gaz , ainsi qu'un ordre de grandeur de la vitesse d'une molécule .

b- Déterminer si un traitement classique convient ou s'il faut effectuer un traitement quantique .

4- Dans un métal comme le cuivre, dont les atomes sont régulièrement répartis dans l'espace aux nœuds d'un réseau, chaque atome s'ionise pour libérer un électron ; l'ensemble de ces se déplace alors quasi librement au sein du réseau d'ions positifs Cu^+ et assure la conduction électrique . Ce système est équivalent à un « gaz d'électrons » en équilibre thermique avec le réseau .

En vous inspirant de la question précédente, montrer que ce gaz d'électrons doit être étudié de façon quantique et non classique .

Exercice 2: modèle de Bohr

Pour expliquer la stabilité de l'atome, Bohr imagina que les électrons devaient se mouvoir sur des orbites circulaires . Sur la première orbite, de rayon a_0 , la quantité de mouvement

de l'électron vérifie $p_0 = \frac{\hbar}{a_0}$.

1- Afin que l'on puisse parler de trajectoire au sens classique du terme, quelle limitation doit-on imposer aux indéterminations Δr et Δp pour l'orbite de Bohr considérée ?

2- Montrer que ces limitations sont incompatibles avec l'inégalité de Heisenberg spatiale ? Conclusion .

Exercice 3 : dualité onde-corpuscule pour la lumière (extrait CCINP 2024) .

1- a- On considère un faisceau parallèle de photons associés à une onde électromagnétique, de longueur d'onde λ , se propageant dans l'air assimilé au vide dans la direction Oz de vecteur unitaire $\vec{e}_z$ (figure 1) .

Rappeler ce que vaut leur énergie E en fonction de c, λ et de h et leur quantité de mouvement p en fonction de h, λ et de $\vec{e}_z$.

b- Calculer l'énergie en eV d'un photon de lumière bleue de longueur d'onde $\lambda = 475$ nm.

2- Ce faisceau parallèle cylindrique de rayon R arrive face à un écran, perpendiculaire à l'axe du faisceau, percé d'un trou circulaire T_1 de centre O et de rayon r (inférieur à R) (figure 1)

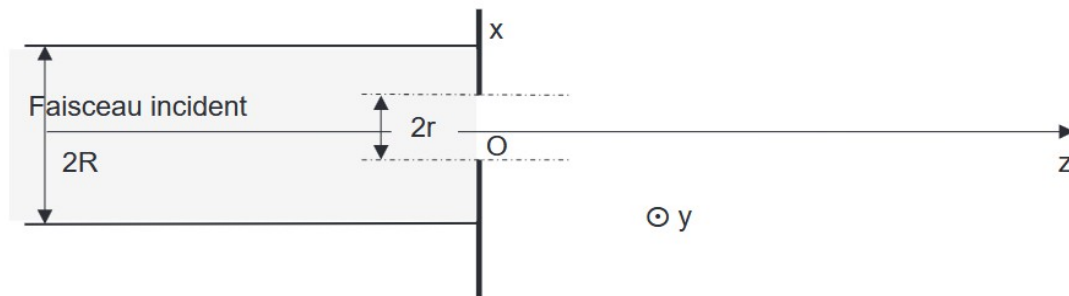


Figure 1 - Géométrie du dispositif à un trou

a- Établir, à partir de l'inégalité d'Heisenberg spatiale, qu'il y a forcément ouverture angulaire du faisceau.

b- Donner un ordre de grandeur de cette ouverture angulaire supposée petite.

Commenter.

Comment appelle-t-on ce phénomène ?

3- Citer une expérience qui met en évidence l'aspect corpusculaire de la lumière.

4- Un électron est expulsé d'un métal sous l'effet d'une radiation s'il absorbe une énergie au moins égale à W_e , énergie appelée travail " d'extraction " .

Le tableau ci-dessous indique les valeurs du travail " d'extraction " pour différents métaux

Métal	Cs	Na	K	Ti	Fe
We en eV	1,15	2,11	2,22	4,33	4,67

Avec quels métaux cités dans le tableau, la lumière bleue du 1-b permet-elle d'obtenir un effet photoélectrique ? Justifier.

Quelle sera la vitesse maximale des électrons émis ? Commenter.

5-a-On utilise une source optique de puissance 1 mW : évaluer l'ordre de grandeur du nombre de photons qui sortent de la source par unité de temps en supposant le faisceau rigoureusement monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8$ nm.

b- À quel niveau de puissance faudrait-il descendre, pour une source, pour que la lumière qu'elle émet soit détectée photon par photon ? On admet que les détecteurs photoniques ont un temps de réponse de l'ordre de la picoseconde

c- Décrire l'évolution des observations sur le détecteur en fonction de la durée d'observation dans la situation des interférences, par deux fentes d'Young éclairées par la source du 5-b, modélisée par une source à photons uniques.

d- Traduire ces observations en termes d'amplitude de probabilité pour un photon, détecté en un point M. Le principe de superposition s'applique-t-il aux probabilités ou aux amplitudes de probabilités ?

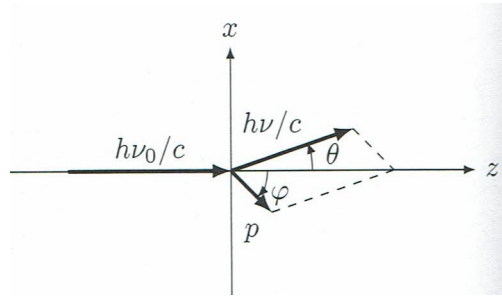
Exercice 4 : Diffusion Compton

On considère une collision entre un électron libre, initialement immobile, de masse m, et un photon. On note:

- ν_0 la fréquence du photon incident, dirigé selon Oz.
- ν la fréquence du photon diffusé, dans une direction d'angle θ par rapport à la

direction incidente Oz.

- $\vec{p}$ la quantité de mouvement finale de l'électron, dans une direction d'angle ϕ par rapport à Oz.



L'objectif est d'établir, puis de discuter le décalage entre longueur d'onde du photon incident λ_0 et longueur d'onde du photon diffusé λ , pour un angle θ donné:

$$\delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta)$$

On utilisera la relation de cinématique relativiste entre quantité de mouvement et énergie pour l'électron: $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$.

1- Quelles sont les grandeurs conservées dans la collision? En déduire trois relations scalaires.

2- Éliminer ϕ en exprimant p^2 en fonction de h, c, ν, ν_0 et θ .

3- Obtenir une expression indépendante de p^2 .

4- Conclure en établissant l'expression de $\lambda - \lambda_0$.

5- On appelle longueur d'onde de Compton de l'électron la quantité $\frac{h}{m c}$. Ordre de grandeur et conséquences sur le rayonnement à utiliser pour mettre l'effet en évidence ($m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$).

6- Discuter sommairement les caractéristiques essentielles du rayonnement diffusé: signe de $\delta\lambda$, dépendance en angle.

Exercice 5 : particule libre et paquet d'onde

1- Rappeler les formules de Planck-Einstein qui relient les paramètres dynamiques et ondulatoires d'une particule quantique de masse m .

2- En déduire par analogie avec l'optique ondulatoire, l'expression de l'onde de De Broglie d'une particule quantique libre non localisée, de masse m et de vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$ sous la forme d'une OPPM en notation complexe.

3- Rappeler l'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ d'une particule libre de masse m .

4- Montrer que la fonction d'onde de De Broglie de cette particule libre vérifie l'équation de Schrödinger à une certaine condition. Quel opérateur différentiel s'identifie à l'énergie cinétique?

5- Déterminer la vitesse de groupe de la particule A quelle grandeur peut-on identifier cette grandeur?

6- Quelle est l'interprétation physique de la fonction d'onde?

7- Donner la raison qui permet de justifier qu'une particule quantique ne peut-être décrite par une onde de De Broglie. Comment est-il possible d'y remédier?

8- On représente l'état de la particule par un paquet d'ondes dont les nombres d'onde ont une valeur moyenne k_0 et une dispersion Δk qui détermine l'extension spatiale x_0 du paquet à $t = 0$

On note ω_0 la pulsation moyenne associée à k_0 .

a- La dispersion Δk entraîne une dispersion pour la vitesse de groupe Δv_g . Exprimer Δv_g en fonction de $\hbar$, m et Δx_0

b- On considérera en première approximation l'expression de v_g constante. Déterminer la largeur $\Delta x(t)$ après un déplacement d'une durée t depuis l'origine. En déduire la durée t_0 au bout de laquelle l'étalement du paquet d'onde a été multiplié par deux.

Exercice 6: atome d'hydrogène .

Les niveaux d'énergie des états à symétrie sphérique de l'atome d'hydrogène s'obtiennent par le calcul unidimensionnel suivant. On considère un électron de masse m soumis à une énergie potentielle $V(x)$ telle que :

$$V(x) = +\infty \text{ si } x \leq 0 \quad \text{et} \quad V(x) = \frac{-A}{x} \text{ si } x > 0$$

où $A = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$, et e est la charge élémentaire .

On posera $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$ où c est la vitesse de la lumière, α est une constante sans dimension, appelée constante de structure fine.

1- Rappeler l'équation de Schrödinger .

2- Définir un état stationnaire . Comment s'écrit la fonction d'onde dans ce cas ?

Déterminer la partie temporelle de la fonction d'onde (on appelle E l'énergie) Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps (ou réduite) .

3- Montrer que la fonction d'onde $\phi_1(x) = D x \exp(\frac{-x}{a})$ pour $x \geq 0$ et $\phi_1(x) = 0$ pour $x < 0$, est solution de l'équation de Schrödinger réduite pour une valeur de a que l'on déterminera en fonction de mc^2 , α et $\hbar c$. D est une constante .

4- Calculer la valeur de l'énergie E_1 correspondante.

5- Calculer E_1 et a . On prendra $mc^2 = 511 \text{ keV}$ et $\hbar c = 197 \text{ eV.nm}$

6- Déterminer la densité de probabilité de présence . A quelle distance la probabilité de trouver l'électron est-elle la plus grande? Représenter la densité de probabilité de

présence en fonction de $\frac{x}{a}$.

Exercice 7 : détermination d'un potentiel à partir de la fonction d'onde .

Soit $\Psi(x, t)$ la fonction d'onde d'une particule de masse m pouvant se déplacer sur l'axe Ox :

$$\Psi(x, t) = A \exp\left(\frac{-m w_0 x^2}{2 \hbar} - i \frac{w_0}{2} t\right) \quad \text{où } A \text{ et } w_0 \text{ sont des constantes .}$$

a- Quelles sont leurs dimensions?

b- Quelles sont les valeurs possibles de A ?

c- Quel type d'état est représenté par cette fonction d'onde ? Quelle est l'énergie de la particule?

d- À quelle énergie potentielle $V(x)$ est soumise cette particule?

e- Dans quel(s) type(s) de situation rencontre-t-on cette énergie potentielle?

f- Quelle est la valeur moyenne $\langle x \rangle$ de la position x de la particule ? Plus précisément, si on prépare $N \gg 1$ systèmes dans cet état et que l'on mesure pour chacun d'entre eux la position x de la particule, quelle est la moyenne des mesures réalisées?

g- Qu'en est-il de la moyenne quadratique $\langle x^2 \rangle$?

h) Que dire de l'étalement des mesures en quantité de mouvement dans cet état?

$$\text{On donne, pour } \alpha > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$