(4)

Exercice 3 : Falaise de potentiel.

a – Mouvement classique :

$x<0$ $\quad V(x)=0$

$$E=\frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow \underline{v_1=\sqrt{\frac{2E}{m}}}$$

$x>0$ $\quad V(x)=-V_0$

$$E=\frac{1}{2}mv_2^2-V_0 \Rightarrow \underline{v_2=\sqrt{\frac{2(E+V_0)}{m}}}$$

La particule passe de manière certaine la falaise et sa vitesse augmente au niveau de la falaise.

L'étude quantique fera apparaître une probabilité non nulle de réflexion de la particule sur la falaise. Cette probabilité diminuant lorsque E augmente.

(5)

b – * On peut reprendre la dém. pour établir la partie temporelle de la fonction d'onde d'un état stationnaire d'énergie E.

$\Psi(x,t)=\varphi(x)g(t)$

$\Psi(x,t)$ vérifie l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+V(x)\Psi(x,t)$$

$$i\hbar\varphi(x)\frac{dg}{dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}g(t)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+V(x)\varphi(x)g(t)$$

(en divisant par $\varphi(x)g(t)$)

$$\underbrace{i\hbar\frac{1}{g(t)}\frac{dg}{dt}}_{\text{ne dépend que de } t}=\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+V(x)}_{\text{ne dépend que de } x}$$

$$i\hbar\frac{1}{g(t)}\frac{dg}{dt}=E$$

$$\frac{dg}{dt}=-i\frac{E}{\hbar}g(t)$$

$$\underline{g(t)=e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}$$

$\psi(x)$ vérifie l'eq de Schrödinger (3) indépendante du temps.

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)}$$

zone 1 : $x<0$ $\psi(x) = \psi_1(x)$

$V(x) = 0$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1(x) = 0$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}$$

zone 2 : $x>0$ $\psi(x) = \psi_2(x)$ $V(x) = -V_0$

$V(x) = -V_0$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\psi_2(x) = 0$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x}$$

$B_2 = 0$ pas d'obstacle.

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x}$$

c- Continuité de $\psi(x)$ et $\frac{d\psi}{dx}$ en $x=0$ (4)

$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2$ (1)

$\frac{d\psi_1}{dx}(0) = \frac{d\psi_2}{dx}(0) \Rightarrow ik_1(A_1 - B_1) = ik_2 A_2$

$\boxed{A_1 - B_1 = \frac{k_2}{k_1}A_2}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow 2A_1 = \left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)A_2$

$$\boxed{A_2 = \frac{2k_1}{k_1+k_2}A_1}$$

$$\boxed{B_1 = \left(\frac{2k_1}{k_1+k_2} - 1\right)A_1 = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}A_1}$$

d- Onde incidente $\psi_i(x) = A_1 e^{ik_1x}$

$$\boxed{\vec{J_i} = |\psi_i(x)|^2 \frac{\hbar \vec{k_1}}{m} = |A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m}\vec{u_x}}$$

Onde réfléchie : $\psi_r(x) = B_1 e^{-ik_1x}$

$\vec{k_r} = -\vec{k_1} = -k_1\vec{u_x}$

$$\vec{J_r} = -|\psi_r(x)|^2 \frac{\hbar \vec{k_1}}{m} = -|B_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m}\vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{J_r} = -\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}|A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m}\vec{u_x}}$$

5

→ Onde transmise :

$$\vec{J_t} = |\psi_t(x)|^2 \frac{\hbar \vec{k_2}}{m} \quad \text{avec } \vec{k_2} = k_2 \vec{u_x}$$

$$\vec{J_t} = |A_2|^2 \frac{\hbar \vec{k_2}}{m}$$

$$R = \frac{\|\vec{J_r}\|}{\|\vec{J_i}\|} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

$$R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E+V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0}}\right)^2$$

$$T = \frac{\|\vec{J_t}\|}{\|\vec{J_i}\|} = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} \frac{k_2}{k_1} = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$T = \frac{4\sqrt{E}\sqrt{E+V_0}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0})^2}$$

$$\underline{R + T = 1}$$

e- $E = \frac{V_0}{2}$

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1+2}}{1 + \sqrt{1+2}}\right)^2 = 0{,}07$$

La particule est réfléchie dans 7% des cas.

6

f- Pour $V_0 = 0$ $R = 0$ pas de falaise.

$E \gg V_0$ $R = 0$